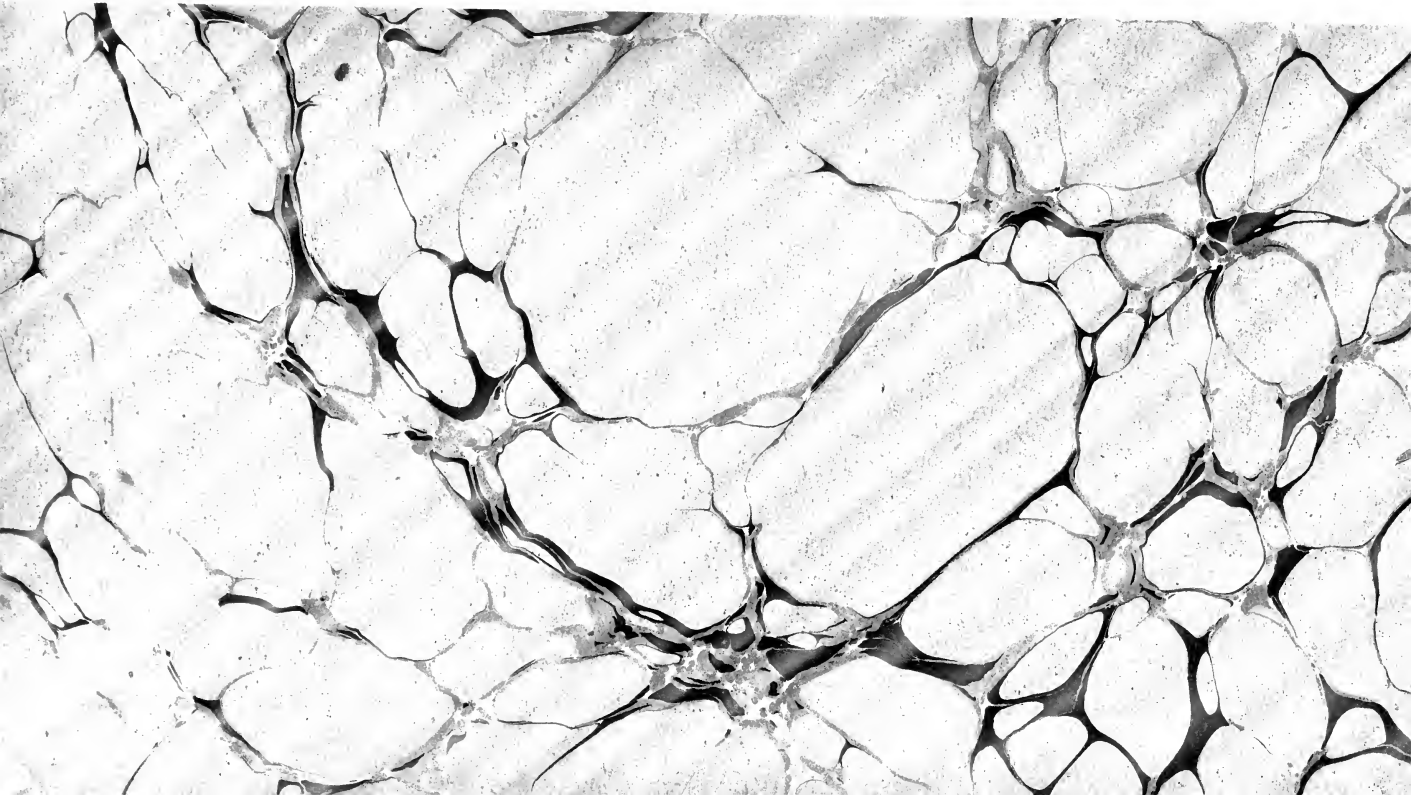
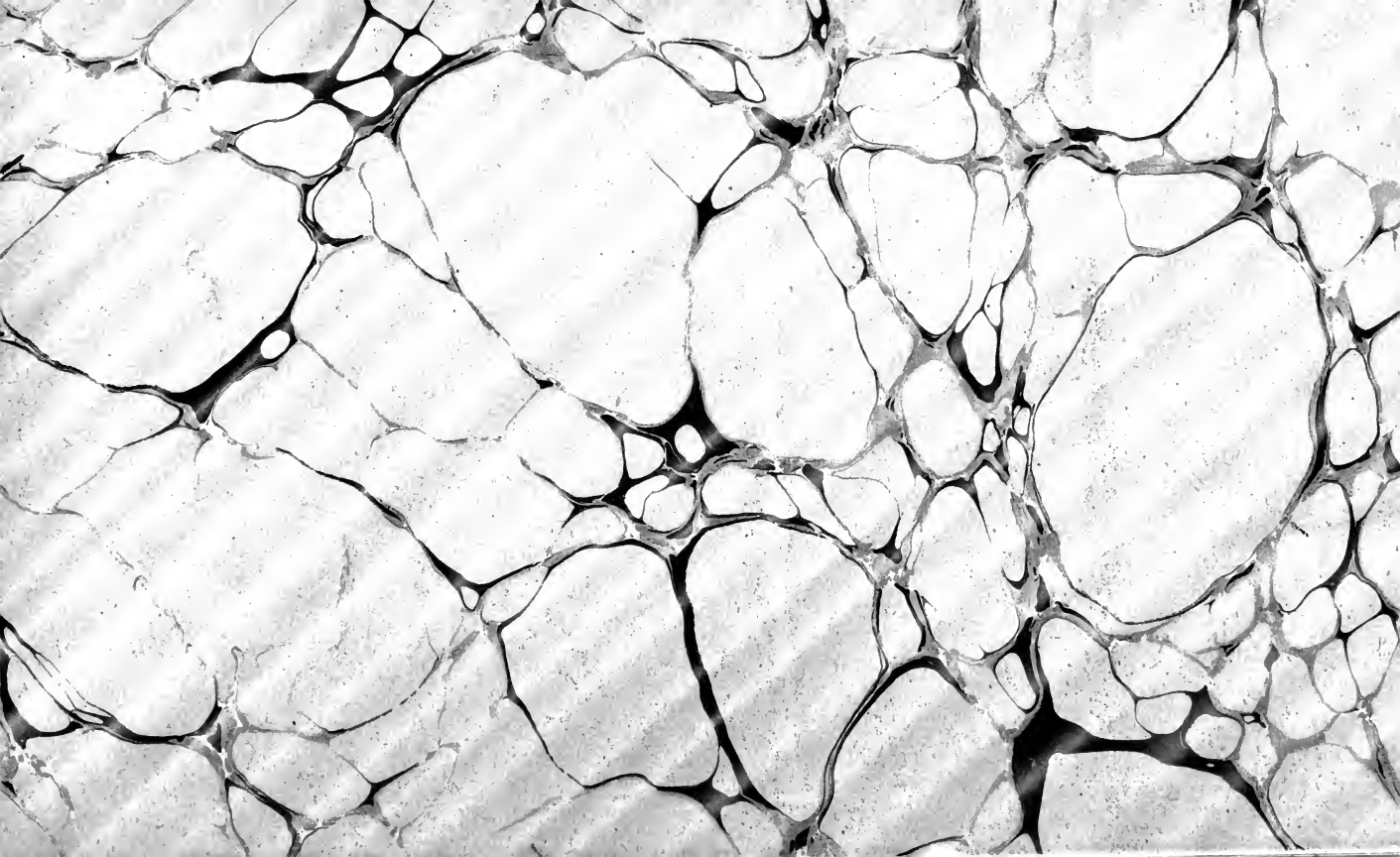
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01215524 8





THÉORIE DES FONCTIONS

DE

VARIABLES IMAGINAIRES

L'Auteur de cet ouvrage se réserve le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Il poursuivra, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toute contrefaçon ou toute traduction faite au mépris de ses droits.

Le dépôt légal de ce second volume a été fait à Paris dans le cours du mois de juin 1875, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Corbeil. — Typ. et stér. de Crété fils.

Math
M334t

THÉORIE DES FONCTIONS

DE

VARIABLES IMAGINAIRES

PAR

M. MAXIMILIEN MARIE

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

TOME DEUXIÈME

—

APPLICATIONS DE LA MÉTHODE

A LA

THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, LIBRAIRE-ÉDITEUR

55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

—

1875

Tous droits réservés.

QA
331
M35
24015
4/8/92 t.2

THÉORIE DES FONCTIONS

DE

VARIABLES IMAGINAIRES

DEUXIÈME PARTIE

APPLICATIONS DE LA MÉTHODE A LA THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS

CHAPITRE XIX

DE L'INDÉTERMINATION QU'ON A CRU AFFECTER LA MARCHE ULTÉRIEURE DE LA FONCTION A PARTIR DU MOMENT OU ELLE AURAIT PRIS UNE VALEUR MULTIPLE OU INFINIE.

259. M. Cauchy pensait, pour des raisons que je ne discuterai pas ici, qu'on ne pourrait pas savoir ce que serait devenue une fonction y, assujettie à varier d'une manière continue en même temps que sa variable x, si la marche attribuée à x amenait cette variable à prendre soit la valeur de l'abscisse d'un des points multiples du lieu $[x, y]$, soit celle de l'abscisse d'une tangente ou d'une asymptote parallèle à l'axe des y.

Nous devons d'abord établir que cette indétermination n'est pas réelle.

260. Nous ne dirons rien du cas où x serait parvenu à une de ses valeurs critiques, sans que y eût pu prendre la valeur multiple ou infinie qui y correspond en même temps que d'autres valeurs simples et finies. La question ne peut pas même se poser dans ce cas.

261. Dans le cas du passage du point $[x, y]$ par un point multiple, où les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ se trouvent différentes et où les dérivées d'ordres supé-

rieurs de y par rapport à x restent finies, l'erreur est encore trop manifeste pour donner lieu à des explications bien longues. Il suffira d'observer que la continuité d'une fonction n'exige pas seulement que cette fonction ne sautille pas sans intermédiaires d'une valeur à une autre plus ou moins éloignée ; qu'il faut encore que la même condition soit remplie par chacune de ses dérivées.

262. L'indétermination est un peu plus difficile à lever lorsque les valeurs singulières de x et de y sont les coordonnées d'un des points du contour apparent, par rapport à l'axe des x, du lieu proposé, mais il est en quelque sorte plus important encore de la faire disparaître dans ce cas que dans le précédent, car la laisser subsister alors reviendrait pour ainsi dire à l'introduire partout; puisque, pour la faire naître, il suffirait, si $\frac{dy}{dx}$ devenait une seule fois réel, de diriger d'avance l'axe des y parallèlement à la tangente au point correspondant du lieu.

Il arriverait de là qu'une question qu'on aurait traitée, dont on aurait la solution, aurait été indéterminée si l'on avait placé autrement le point de vue !

L'inconnue de la question qu'on traite conserve la même valeur, de quelque manière qu'on dirige l'axe des y, tant que l'indétermination ne se présente pas ; si donc elle se présente, parce qu'on a mal dirigé l'axe des y, la seule chose à faire est de le diriger autrement et de recommencer le calcul.

Soient :

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0 \sqrt{-1}$$

les valeurs initiales de la variable et de la fonction ;

$$x = \alpha + \beta \sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta' \sqrt{-1}$$

des valeurs quelconques que prennent en même temps x et y, x ayant varié d'une manière continue à partir de $x = x_0$, en suivant une loi de progression ou chemin, réglée par une condition

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

et y ayant aussi varié d'une manière continue à partir de $y = y_0$; soient enfin :

$$x = mx_1 + ny_1 \quad y = m'x_1 + n'y_1$$

les formules de transformation qui correspondent au changement qu'on veut faire subir aux axes, et

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}, \quad y_1 = \alpha'_1 + \beta'_1 \sqrt{-1}$$

les valeurs de x_1 et de y_1 qui correspondent à

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

on aura entre α, β, α', β', α_1, β_1, α'_1, β'_1 les cinq équations

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$
$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = m(\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}) + n(\alpha'_1 + \beta'_1\sqrt{-1}),$$
$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = m'(\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}) + n'(\alpha'_1 + \beta'_1\sqrt{-1}),$$

auxquelles il faudra joindre l'équation nouvelle de la courbe, ce qui fera en tout sept équations, de sorte qu'une seule des variables α, β, α', β', α_1, β_1, α'_1 et β'_1 restera arbitraire.

Ces sept équations définiront explicitement ou implicitement, pour x_1, une loi de progression

$$\varphi_1(\alpha_1, \beta_1) = 0$$

parfaitement équivalente à $\varphi(\alpha, \beta) = 0$; de telle sorte que le point $[x_1, y_1]$, assujetti à partir de la même position initiale que le point $[x, y]$, suivra exactement la même route que lui. Mais alors, quand la nouvelle abscisse x_1 prendra la valeur correspondant à une valeur critique $a + b\sqrt{-1}$ de l'ancienne, la nouvelle ordonnée, habituellement, ne prendra plus des valeurs égales, ou il faudrait qu'on eût encore mal placé le point de vue.

A la vérité la loi de progression $\varphi_1(\alpha_1, \beta_1) = 0$ conduisant chacun des points $[x_1, y_1]$ par la même route qu'il aurait anciennement suivie, comme plusieurs des points $[x, y]$ venaient occuper une même position, lorsque x prenait la valeur $a + b\sqrt{-1}$, il faudra bien que les routes d'autant des points $[x_1, y_1]$ passent aussi par cette position ; mais tandis que quelques-uns des points $[x, y]$ venaient, en même temps, occuper la même place, les points $[x_1, y_1]$ correspondants n'y passeront plus que successivement.

Le changement d'axes le plus simple consistera habituellement dans une substitution de l'axe des x à l'axe des y, et réciproquement.

263. Nous prendrons pour exemple l'équation

$$y^2 = 2px,$$

et nous supposerons le chemin suivi par x défini par l'équation

$$\beta = \alpha.$$

Si nous faisons tourner les axes de 90 degrés, les formules de transformation seront

$$x = -y_1 \quad \text{et} \quad y = x_1,$$

de sorte que, x et y étant représentés respectivement par

$$\alpha + \alpha\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

x_1 et y_1 le seront par

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad -\alpha - \alpha\sqrt{-1}.$$

On aura d'ailleurs entre α, α', β' les deux équations tirées de $y^2 = 2px$,

$$\alpha'^2 - \beta'^2 = 2p\alpha \quad \text{et} \quad \alpha'\beta' = p\alpha,$$

d'où l'on conclura pour définir le nouveau chemin

$$\beta'^2 + 2\alpha'\beta' - \alpha'^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \beta' = \alpha'\left(-1 \pm \sqrt{2}\right).$$

Cela posé, soit par exemple

$$x_0 = p\left(1 + \sqrt{-1}\right)$$

la valeur initiale de x et

$$y_0 = p\sqrt{1+\sqrt{2}} + p\sqrt{-1+\sqrt{2}}\ \sqrt{-1}$$

la valeur initiale de y, les valeurs initiales de x_1 et de y_1 seront donc

$$x_{1,0} = p\sqrt{1+\sqrt{2}} + p\sqrt{-1+\sqrt{2}}\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y_{1,0} = -p\left(1+\sqrt{-1}\right).$$

Or c'est la partie

$$\beta' = \alpha'\left(-1 + \sqrt{2}\right)$$

du nouveau chemin qui comporte ces valeurs initiales; par conséquent, il faudra dans l'équation

$$x_1^2 = -2py_1, \quad \text{ou} \quad y_1 = \frac{-x_1^2}{2p}$$

assujettir x_1, représenté par $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, à suivre le chemin

$$\beta' = \alpha'\left(-1 + \sqrt{2}\right),$$

pour que le point $[x_1, y_1]$ décrive la même route que le point $[x, y]$; et si $\frac{dy_1}{dx_1}$ reste continu, quand x_1 et y_1 passeront en même temps par zéro, le chemin ne pourra pas se changer en

$$\beta' = \alpha'\left(-1 - \sqrt{2}\right);$$

par conséquent, quelle que soit la valeur finale de x, il faudra, parmi

les deux valeurs correspondantes de y, choisir celle qui satisfera à la condition

$$\beta' = \alpha' (-1 + \sqrt{2}).$$

264. Le cas où y prend une valeur infinie n'est pas plus difficile à traiter que les deux précédents.

Lorsqu'une question concrète aura donné lieu à considérer une des variables dénommées, dans un état de grandeur dépassant toute limite, cette même question, si elle est bien posée, fournira toujours un moyen de savoir comment la variable considérée revient de l'infini.

L'infini n'est encore que relatif; il ne se présente que quand on ne veut pas l'éviter : à telle variable qui devient infinie dans les équations qu'on a posées pour traiter une question, il en correspond des milliers d'autres qui auraient pris des valeurs correspondantes finies ; c'est à l'opérateur à substituer à propos l'une d'elles à celle qui tombe dans un cas singulier.

Par exemple, quand le point $[x, y]$ passera sur la conjuguée dont les abscisses sont réelles, serait-on bien venu à prétendre que C devenant infini, sa marche ultérieure serait affectée d'indétermination ?

Avec une pareille défaite on se trouverait d'avance dispensé de répondre à toute question quelconque.

Si y devient infini, on étudiera la marche d'une autre variable qui ne devienne pas infinie en même temps que y; par exemple, on étudiera la marche de $\frac{1}{y}$, les variations de $\frac{1}{y}$ fourniront sans difficulté celles de y.

CHAPITRE XX

DE LA MARCHE DES VALEURS D'UNE FONCTION MULTIPLE D'UNE SEULE VARIABLE.

265. Une fonction qui peut prendre plusieurs valeurs pour une même valeur de la variable dont elle dépend n'est pas déterminée par la valeur de cette variable.

Cependant la fonction est tellement liée à sa variable, que dès qu'on aura fait choix pour l'une et l'autre de valeurs initiales se correspondant et réglé la marche de la variable, la fonction, assujettie à varier d'une manière continue, ne pourra plus prendre qu'une seule valeur pour chaque valeur de la variable.

Si donc on a attribué à la fonction y une valeur initiale y_0, choisie parmi celles qui correspondent à la valeur initiale x_0 de la variable x et qu'on ait fixé la marche de cette variable en établissant entre ses parties réelle et imaginaire une relation arbitraire ou imposée par la question qu'on voulait traiter, on pourra demander ce que sera devenue la fonction, lorsque la variable aura atteint une valeur quelconque x_1.

266. Lorsque la fonction n'entre qu'au second degré dans l'équation qui la définit, la question est d'une simplicité telle que nous croyons devoir traiter ce cas à part. Les équations du second degré se présentent d'ailleurs si fréquemment dans la pratique, qu'il y avait lieu d'en faire l'objet d'une étude spéciale.

L'équation

$$f(x, y) = 0$$

étant du second degré par rapport à y, et d'ailleurs algébrique, donnera

$$y = \mathrm{P} \pm \sqrt{\mathrm{Q}},$$

P et Q étant deux fonctions rationnelles de x, qui n'auront chacune qu'une valeur pour chaque valeur de x.

x variant d'une manière continue de $x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ à $x_1 = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}$, en suivant un chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, y partira de l'une de ses valeurs qui correspondent à $x = x_0$, valeur que nous désignerons par y_0 et qui pourra être

$$\mathrm{P}_0 + \sqrt{\mathrm{Q}_0} \quad \text{ou} \quad \mathrm{P}_0 - \sqrt{\mathrm{Q}_0};$$

et la question sera de savoir ce que y, assujetti à varier d'une manière continue, sera devenu lorsque x aura atteint la valeur x_1.

Or la valeur finale de y se composera de la valeur finale de P sur laquelle il ne s'élèvera aucun doute, et de la valeur finale de $y - P$: on pourra donc simplifier la question en prenant $y - P$ pour variable, au lieu de y.

En désignant par z cette nouvelle variable, on n'aura plus à s'occuper que de l'équation

$$z^2 = Q \quad \text{ou} \quad z = \pm\sqrt{Q}.$$

Les deux valeurs de z qui correspondront à une même valeur de x seront toujours différentes, et cependant une des difficultés de la question consistera précisément à les distinguer l'une de l'autre, à fixer le langage de manière à n'y laisser subsister aucune ambiguïté.

Mais la méthode des conjuguées nous en donnera immédiatement les moyens, car les deux solutions qui correspondront à une même valeur de x auront toujours leurs caractéristiques de signes contraires, de sorte qu'il suffira toujours de rechercher ce que sera devenue la caractéristique C de la solution mobile pour savoir ce que sera devenue cette solution elle-même.

Si z est parti, par exemple, de la valeur initiale

$$z_0 = \alpha'_0 + \beta_0 C_0 \sqrt{-1},$$

C_0 étant positif, sa valeur finale sera

$$z_1 = \alpha'_1 + \beta_1 C_1 \sqrt{-1}$$

ou

$$z_1 = -\alpha'_1 - \beta_1 C_1 \sqrt{-1},$$

suivant que C aura changé de signe un nombre pair ou un nombre impair de fois. Or il ne sera jamais difficile de savoir combien de fois C changera de signe pendant que x passera, par le chemin $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, de la valeur x_0 à la valeur x_1, puisqu'on aura deux équations entre C, α et β.

Les changements de signes de C correspondront aux passages de cette variable par zéro ou par l'infini, c'est-à-dire aux passages du point $[x, z]$ sur les conjuguées $C = 0$ et $C = \infty$ du lieu $z^2 - Q = 0$. Ce seront donc ces passages qu'il faudra relever et compter.

Voilà tout ce à quoi se réduit la méthode que nous proposons pour les équations du second degré. Il suffira de l'appliquer à quelques exemples pour montrer que la pratique en est aussi simple que la théorie.

267. La méthode que nous appliquerons aux équations de degrés supérieurs au second ne sera guère plus compliquée dans ses moyens,

quoiqu'elle doive exiger souvent des calculs délicats ; elle ne sera au reste qu'un simple prolongement de celle que nous venons d'indiquer pour les équations du second degré.

La question se réduira toujours à savoir, à chaque instant, sur quelle conjuguée de la courbe proposée le point $[x, y]$ sera venu se placer et sur quelle branche de cette conjuguée il se trouvera, car alors on pourra déterminer la valeur qu'aura prise la fonction y.

Cela posé, les conjuguées d'une courbe $f[x, y] = 0$ se divisent d'abord en deux catégories distinctes, la première comprenant les conjuguées qui touchent la courbe réelle, et la seconde celles qui ne la touchent pas.

Or, le passage du point $[x, y]$ d'une conjuguée d'une catégorie sur une conjuguée de l'autre, ne peut avoir lieu qu'au moment où ce point passe sur une conjuguée limite commune des deux catégories, qui touche à la fois les deux enveloppes.

Ces passages devront être relevés avec soin, et comme d'ailleurs la conjuguée servant de lien entre les deux catégories aura généralement sa caractéristique comprise entre les caractéristiques des conjuguées de l'une et de l'autre catégorie, qui la comprennent elle-même, le signe de la dérivée de C, prise par rapport à une des parties de la variable indépendante, au moment où le point $[x, y]$ passera sur la conjuguée limite, suffira pour décider si ce point va changer de catégories de conjuguées ou s'il rebroussera chemin.

Les conjuguées limites, dont nous venons de parler, peuvent être en nombre quelconque; ce sont celles qui touchent la courbe réelle en ses points d'inflexion, ou en ses points situés à l'infini.

268. Si la courbe réelle a plusieurs branches, fournies par les différentes valeurs de y que donne son équation, pour une même valeur de x, les conjuguées qui la touchent devront être divisées en autant de classes.

Le point $[x, y]$ ne pourra se transporter d'une conjuguée appartenant à une classe sur une conjuguée appartenant à la classe voisine, qu'en traversant celle qui sert de lien entre les deux classes ; d'ailleurs la caractéristique de cette dernière conjuguée sera encore habituellement comprise entre les caractéristiques des deux conjuguées de l'une et de l'autre classe qui l'avoisineront immédiatement; de sorte que si l'on a déterminé le signe de la dérivée de C par rapport à l'une des parties de la variable indépendante, au moment du passage du point $[x, y]$ sur la conjuguée limite, on pourra encore savoir si le point $[x, y]$ a, ou non, changé de classe.

Les conjuguées qui séparent les différentes classes les unes des autres sont celles qui ont pour caractéristiques 0 ou ∞ et quelques-unes de celles qui touchent la courbe réelle en ses points singuliers. La discussion préalable de la courbe les fait suffisamment connaître.

269. Les conjuguées qui ne touchent pas la courbe réelle se divi-

sent de la même manière en plusieurs classes, lorsque leur enveloppe imaginaire se compose de plusieurs branches, ou comporte des points singuliers.

270. Chaque conjuguée peut être composée de parties distinctes et séparées. Dans ce cas, le point $[x, y]$ ne saurait se transporter de l'une sur une autre, qui en est éloignée d'une quantité finie, qu'en prenant, avant tout, son passage sur une conjuguée particulière où les deux parties en question se confondent ou aient au moins un point commun. Ces passages peuvent être relevés comme tous les précédents, parce qu'ils sont toujours signalés par un caractère analytique plus ou moins saillant.

271. Enfin chaque arc d'une conjuguée quelconque, tangent à l'enveloppe réelle ou à l'enveloppe imaginaire, se trouve naturellement décomposé en deux branches par le point où il touche l'une des deux enveloppes. Mais le point $[x, y]$ ne peut passer d'une des branches sur l'autre qu'en passant sur l'enveloppe. Nous donnerons les moyens de savoir s'il change alors de branche.

272. Nous n'aurons pas à revenir dans nos explications générales sur les passages du point $[x, y]$ par une conjuguée servant de lien entre les deux catégories ou entre deux classes appartenant à une même catégorie; nous regardons comme suffisamment traitées, dans ce qui précède, les questions que pourrait soulever l'analyse des circonstances qui accompagnent ces passages.

On verra au reste, par les exemples que nous examinerons, qu'on peut toujours lever les difficultés, peu considérables d'ailleurs, que présente, dans ces différents cas, l'analyse des faits; nous nous bornerons ici à observer qu'une méthode quelconque de classification des solutions imaginaires devait permettre de lever aisément ces difficultés.

Nous passons de suite à l'examen des questions de détail qui nécessitent des explications spéciales.

273. Quoique les solutions d'une équation $f[x, y] = 0$ puissent toujours se permuter les unes dans les autres, ce qui, au premier abord, semblerait interdire toute distinction entre elles, nous les étudierons cependant dans trois états principaux, très-différents à certains égards.

Lorsque x et y, partant de valeurs réelles a et b, prennent des accroissements imaginaires très-petits, le point $[x, y]$ se transporte, à une très-petite distance de la courbe réelle, sur une conjuguée tangente à cette courbe en un point voisin du point $[a, b]$, dont la caractéristique diffère par conséquent très-peu du coefficient angulaire de la tangente à la courbe réelle au point $[a, b]$.

Dans ce cas, si x redevient réel sans avoir dépassé de certaines limites, y redevient en même temps réel, le point $[x, y]$ repasse sur la courbe réelle, et si la partie imaginaire de x change de signe, la même chose

arrive à la partie imaginaire de y; le point $[x, y]$ se transporte donc, sur la nouvelle conjuguée qui le contient, du côté opposé à celui où il se trouvait d'abord, par rapport au point de contact de la courbe réelle avec la conjuguée qui le contenait.

274. Lorsque x part d'une valeur réelle à laquelle correspond une valeur imaginaire de y, et que les deux variables prennent des accroissements imaginaires très-petits, le point $[x, y]$ se transporte sur une conjuguée dont la caractéristique diffère peu de l'infini positif ou négatif.

Dans ce cas, si x redevient réel, sans avoir dépassé de certaines limites, y reste imaginaire, et si la partie imaginaire de x change de signe, la partie imaginaire de y conserve le sien, d'où il résulte que la caractéristique du point $[x, y]$ en change.

Les mêmes faits se passent dans un autre ordre quand le point $[x, y]$ passe sur la conjuguée $C = 0$: la caractéristique de ce point change alors de signe en même temps que la partie imaginaire de y.

Enfin le troisième cas que nous considérerons est celui où le point $[x, y]$ prend des positions voisines de l'enveloppe imaginaire des conjuguées : au moment où il passe sur cette enveloppe, on doit chercher à savoir à quelles conditions il changerait de branche sur sa conjuguée divisée par le point où elle touche l'enveloppe.

275. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une solution où les parties imaginaires de y et de x soient en même temps aussi petites qu'on le voudra, à laquelle corresponde par conséquent un point infiniment peu éloigné de la courbe réelle et appartenant à une conjuguée tangente à cette courbe.

x variant d'une manière continue, le point $[x, y]$ restera sur la même conjuguée, ou se transportera sur une conjuguée voisine appartenant à la même catégorie; il ne pourra d'ailleurs passer d'une branche supérieure sur une branche inférieure, par rapport au point de contact avec la courbe réelle, ou réciproquement, sans passer sur la courbe réelle; il restera donc sur la même suite de branches tant que la partie imaginaire de x ne passera pas par zéro; mais si la partie imaginaire de x passe par zéro et change de signe, en général la partie imaginaire de y changera aussi de signe, et le point $[x, y]$ passera d'une branche supérieure sur une branche inférieure, ou inversement.

En effet, représentons toujours x par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et y par $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$; soient, en conséquence, α et α' les valeurs que prennent x et y au moment où β et β' s'annulent : pour obtenir les coordonnées d'un point infiniment voisin du point $[\alpha, \alpha']$, on pourrait faire varier à la fois α et α', β et β'; mais comme en faisant varier α et α' on ne ferait que déplacer le point de départ sur la courbe réelle, ce qui ne peut avoir d'utilité, il suffira de faire varier β et β' : or C désignant la dérivée de y par rapport à x au point $x = \alpha$, $y = \alpha'$, ou la caractéristique de la

conjuguée qui touche la courbe réelle en ce point, si x prend la valeur $\alpha + d\beta\sqrt{-1}$, y deviendra $\alpha' + Cd\beta\sqrt{-1}$, le point

$$[\alpha + d\beta\sqrt{-1}\ ,\ \alpha' + Cd\beta\sqrt{-1}]$$

restera donc sur la conjuguée C; mais, suivant que $d\beta$ sera positif ou négatif, le point

$$[\alpha + d\beta\sqrt{-1}\ ,\ \alpha' + Cd\beta\sqrt{-1}]$$

se trouvera d'un côté ou de l'autre du point $[\alpha, \alpha']$.

276. Passons aux solutions du second groupe.

Les valeurs imaginaires de y, tirées d'une équation algébrique à coefficients réels,

$$f(x, y) = 0,$$

sont conjuguées deux à deux, lorsque x est réel, et elles conservent une certaine trace de ce caractère initial lorsque x varie ensuite par valeurs imaginaires dans de certaines limites; c'est-à-dire, que lorsque x prend des valeurs imaginaires voisines de sa valeur réelle initiale, les valeurs imaginaires de y qui dérivent de celles qui étaient conjuguées deux à deux restent d'abord à peu près conjuguées, ou telles, qu'en les rangeant deux à deux convenablement, on en trouverait les parties réelles peu différentes et les parties imaginaires à peu près égales et de signes contraires.

Or, de deux points ayant ainsi leurs abscisses à peu près égales et presque réelles et leurs ordonnées à peu près conjuguées, l'un appartiendra évidemment à une branche supérieure d'une conjuguée, par rapport à son point de contact avec la courbe réelle, et l'autre à une branche inférieure d'une conjuguée infiniment voisine.

Au reste les caractéristiques de ces deux conjuguées seront évidemment de signes contraires. Car si x passe de la valeur α à la valeur $\alpha + d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$, dans les deux valeurs correspondantes de y, les parties imaginaires qui étaient finies resteront d'abord de signes contraires.

Cela posé, il est clair qu'un point

$$x = \alpha + d\alpha + d\beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' + d\alpha' + (\beta' + d\beta')\sqrt{-1},$$

s'il se trouve sur une branche supérieure de la conjuguée à laquelle il appartient, ne pourra passer sur une branche inférieure d'une conjuguée voisine qu'en passant sur la courbe réelle ou sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées, suivant que la branche de la conjuguée $C = \infty$

qui contiendrait le point voisin

$$x = \alpha, \quad y = \alpha' + \beta' \sqrt{-1}$$

toucherait l'une ou l'autre enveloppe; il est de même évident que la caractéristique du point mobile ne pourrait changer de signe, pour de très-petits écarts de x, qu'au moment où ce point repasserait sur la conjuguée $C = \infty$, c'est-à-dire quand x reprendrait une valeur réelle.

277. Nous arrivons maintenant aux solutions du troisième groupe.

Lorsque $\frac{dy}{dx}$ passe par une valeur réelle, x et y étant imaginaires, le point $[x, y]$ se trouve momentanément sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées, et il s'agit de savoir s'il va passer du côté opposé à celui où il se trouvait d'abord, par rapport au point de contact avec l'enveloppe, de la conjuguée mobile qui le contient.

La solution de cette question se préjuge aisément : tant que $\frac{dy}{dx}$ reste imaginaire, le point $[x, y]$ reste, sur la conjuguée à laquelle il appartient, du même côté du point où cette conjuguée touche l'enveloppe imaginaire; lorsque $\frac{dy}{dx}$ passe par une valeur réelle, le point $[x, y]$ vient se placer sur l'enveloppe et si la partie imaginaire de $\frac{dy}{dx}$ reparaît, mais affectée du signe contraire, il y a lieu de penser que le point $[x, y]$, ayant poursuivi son chemin, est venu se placer sur une nouvelle conjuguée, de l'autre côté du point où cette conjuguée touche l'enveloppe.

Soient

$$x = \alpha + \beta \sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta' \sqrt{-1}$$

les coordonnées d'un point de l'enveloppe imaginaire; $\frac{dy}{dx}$ en ce point sera réel et égal à m; $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera généralement imaginaire et égal $p + q\sqrt{-1}$; si x prend un accroissement $d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$, l'accroissement correspondant de y sera

$$(d\alpha + d\beta \sqrt{-1})\, m$$

et celui de $\frac{dy}{dx}$

$$(d\alpha + d\beta \sqrt{-1})\,(p + q\sqrt{-1}).$$

Notons en passant que pour rester sur l'enveloppe il faudrait faire

$$q d\alpha + p d\beta = 0,$$

mais supposons que nous voulions rester sur la même conjuguée; pour cela il faudrait que la caractéristique ne variât pas, c'est-à-dire que le rapport des parties imaginaires de dy et de dx fût aussi égal à C; mais avant tout, il doit être égal à m; or m et C différeront généralement l'un de l'autre, de sorte que pour remplir en même temps les deux conditions, il faudra faire $d\beta$ et, par suite, $d\beta'$ nuls.

Alors l'accroissement de $\frac{dy}{dx}$ se réduira à

$$(p + q\sqrt{-1})\, d\alpha,$$

de sorte que le signe de sa partie imaginaire changera avec celui de $d\alpha$.

Ainsi trois points infiniment voisins d'une même conjuguée, pour lesquels la partie imaginaire de $\frac{dy}{dx}$ est positive, nulle et négative, ou négative, nulle et positive, sont tels que

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta\sqrt{-1} - d\alpha, \\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1} - md\alpha; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta\sqrt{-1} + d\alpha, \\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1} + md\alpha. \end{cases}$$

On voit que le point situé sur l'enveloppe est entre les deux autres.

CHAPITRE XXI

DE LA MARCHE DES VALEURS D'UNE FONCTION MULTIPLE D'UNE SEULE VARIABLE.

APPLICATIONS.

278. Soit d'abord l'équation

$$y^2 = 2px + q^2$$

qui représente une parabole réelle et une infinité de paraboles imaginaires égales à la première et opposées à elle par un diamètre commun.

p étant supposé positif, toutes les conjuguées qui touchent la courbe réelle en des points situés au-dessus de l'axe des x ont leurs caractéristiques positives; celles qui la touchent en des points situés au-dessous de l'axe des x ont leurs caractéristiques négatives. Entre deux se trouve la conjuguée qui touche la courbe réelle à son sommet et dont la caractéristique est infinie; aucune conjuguée d'ailleurs n'a sa caractéristique nulle.

De quelque manière que x varie, C ne peut donc changer de signe qu'en passant par l'infini, ce qui arrive quand x prend des valeurs réelles moindres que $-\frac{q^2}{2p}$, c'est-à-dire lorsque β passe par zéro, α étant moindre que $-\frac{q^2}{2p}$.

D'ailleurs chaque fois que β change de signe en passant par zéro, α étant moindre que $-\frac{q^2}{2p}$, C change aussi de signe; car la partie imaginaire de y, qui est alors finie, ne peut pas changer brusquement de signe.

Il sera donc facile de répondre à toutes les questions qu'on pourrait se proposer sur la marche des valeurs de y définies par l'équation considérée.

279. Soit en second lieu l'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

qui représente une ellipse réelle et toutes les hyperboles imaginaires qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun.

Ces hyperboles ont leur caractéristique négative lorsqu'elles touchent l'ellipse dans le premier et le troisième quadrant, positive lorsqu'elles la touchent dans le deuxième et le quatrième. La conjuguée qui a pour axe transverse l'axe des x, a sa caractéristique infinie, celle qui a pour axe transverse l'axe des y a sa caractéristique nulle.

Il résulte de là que la caractéristique change de signe en passant par zéro lorsque le point de contact de l'ellipse avec la branche de conjuguée sur laquelle se trouve le point $[x, y]$, passe du premier au deuxième quadrant, ou du troisième au quatrième, ou inversement, et qu'elle change de signe en passant par l'infini lorsque le même point de contact passe du deuxième au troisième quadrant, ou du quatrième au premier, ou inversement.

D'un autre côté, la conjuguée dont la caractéristique est infinie a ses abscisses réelles et plus grandes que a, ou moindres que $-a$, et celle dont la caractéristique est nulle les a imaginaires sans parties réelles; par conséquent C ne peut changer de signe qu'aux époques où β passe par zéro, α^2 étant plus grand que a^2, ou bien où α passe par zéro, quel que soit alors β.

D'ailleurs, quand β change de signe en passant par zéro, α^2 étant alors plus grand que a^2, la caractéristique change de signe, car la partie imaginaire de y conserve le sien. De même, quand α change de signe en passant par zéro, la caractéristique change encore de signe; car la partie imaginaire de x, qui était finie, conserve son signe, et celle de y, qui était infiniment petite, en change. En effet, si le point de la conjuguée $C = 0$ par où passe le point $[x, y]$ a pour coordonnées

$$x = \beta\sqrt{-1},$$

et par exemple

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2+\beta^2},$$

le coefficient différentiel de y par rapport à x est alors

$$-\frac{b}{a}\frac{\beta\sqrt{-1}}{\sqrt{a^2+\beta^2}}.$$

Or si x augmente de $d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$, la partie imaginaire de y augmente de

$$-d\alpha\,\frac{b\beta\sqrt{-1}}{a\sqrt{a^2+\beta^2}},$$

quantité qui change de signe avec $d\alpha$ et qui est indépendante de $d\beta$.

En résumé donc, C change de signe chaque fois que α change de

signe, quel que soit alors β, et chaque fois que β change de signe, α^2 étant plus grand que a^2.

Par suite, le point de départ $[x_0, y_0]$ ayant, par exemple, sa caractéristique positive, le point d'arrivée sera

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1},$$
$$y_1 = \alpha'_1 + \beta_1 C_1 \sqrt{-1},$$

C_1 étant positif ou négatif, suivant que le nombre des passages à compter se sera trouvé pair ou impair.

280. Considérons encore l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 :$$

elle représente simultanément une hyperbole réelle et toutes les ellipses imaginaires qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun.

Ces conjuguées ont pour enveloppe réelle l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

et pour enveloppe imaginaire l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2.$$

Celles qui touchent la courbe réelle dans le premier et le troisième quadrant ont leur caractéristique positive, les autres l'ont négative. La caractéristique ne peut d'ailleurs varier qu'entre $-\infty$ et $-\frac{b}{a}$ ou entre $+\frac{b}{a}$ et $+\infty$; elle ne peut donc changer de signe qu'en passant par l'infini, ce qui arrive lorsque x passe par une valeur réelle comprise entre $-a$ et $+a$.

281. La discussion serait la même pour l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2.$$

Elle représente simultanément une hyperbole réelle ayant pour axe transverse l'axe des y et toutes les ellipses imaginaires qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun.

Ces conjuguées ont pour enveloppe réelle l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2$$

et pour enveloppe imaginaire l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

Celles qui touchent la courbe réelle dans le premier et le troisième quadrant ont leur caractéristique positive, les autres l'ont négative. La caractéristique ne peut d'ailleurs varier qu'entre $-\frac{b}{a}$ et $+\frac{b}{a}$, par conséquent elle ne peut changer de signe qu'en passant par zéro. Cela arrive lorsque y est réel et moindre que b, par conséquent lorsque x est imaginaire, sans partie réelle et moindre que a en valeur absolue.

282. Il serait inutile de multiplier davantage les exemples qui se rapportent au second degré ; nous prendrons maintenant la fonction y définie par l'équation

$$y^3 - a^2y + a^2x = 0.$$

La courbe représentée par cette équation est MON (*fig.* 12) : l'origine est un point d'inflexion, la tangente y est dirigée suivant la bissectrice de l'angle des axes ; les points limites L et L′ ont pour coordonnées

$$x = \pm\frac{2a}{3\sqrt{3}}, \quad y = \pm\frac{a}{\sqrt{3}},$$

la courbe n'a pas d'asymptotes, mais la direction asymptotique est $y = 0$.

Les conjuguées dont la caractéristique n'est pas comprise entre 0 et 1 touchent la courbe réelle, les autres ont pour enveloppe la courbe M′ON′ représentée par l'équation

$$y^3 + a^2y - a^2x = 0,$$

car pour que $\frac{dy}{dx}$ soit réel, il faut que α et α' soient nuls.

La conjuguée C = 1, ROSTOV, sépare les deux catégories et appartient à l'une et à l'autre ; elle a encore cela de remarquable qu'elle est la seule dont les deux parties se touchent. Elle peut servir d'intermédiaire au point $[x, y]$, soit pour passer d'une catégorie de conjuguées à l'autre, soit pour passer d'une portion à l'autre d'une même conjuguée sans changer de catégorie, en traversant l'origine.

Cette conjuguée est déterminée par les équations

$$\alpha'^3 - 3\alpha'\beta^2 - a^2\alpha' + a^2\alpha = 0$$

et

$$3\alpha'^2 = \beta^2,$$

d'où l'on tire

$$a^2\alpha = \pm\left(\frac{8\beta^3}{3\sqrt{3}} + \frac{a^2\beta}{\sqrt{3}}\right)$$

ou

$$a^4\alpha^2 - \left(\frac{8\beta^3}{3\sqrt{3}} + \frac{a^2\beta}{\sqrt{3}}\right) = 0;$$

de sorte que les solutions du système des équations

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

et

$$a^4\alpha^2 - \left(\frac{8\beta^3}{3\sqrt{3}} + \frac{a^2\beta}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0$$

correspondront aux passages du point $[x, y]$ des conjuguées d'une catégorie sur celles de l'autre.

L'équation de la conjuguée $C = 1$, en coordonnées réelles, est

$$8y^3 + (1 \pm \sqrt{3})^3 a^2 y - (1 \pm \sqrt{3})^3 a^2 x = 0.$$

BLB_1, $B'L'B'_1$ est la conjuguée $C = \infty$, la conjuguée $C = 0$ est évanouissante.

L'origine étant le centre commun de toutes les conjuguées, une conjuguée quelconque touche l'une ou l'autre enveloppe en deux points symétriquement placés par rapport à l'origine. Celle qui touche l'enveloppe imaginaire aux points P, P' a pour caractéristique le coefficient angulaire de POP'.

Lorsqu'on cherche à annuler α, on trouve qu'il peut passer par zéro, en même temps que α', lorsque C est moindre que 1, et qu'il ne devient nul isolément que quand C est négatif et moindre en valeur absolue que $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire sur les conjuguées qui touchent la courbe réelle à gauche de A ou à droite de A'.

Si l'on cherche les points de rencontre d'une conjuguée avec la courbe réelle, on trouve

$$\alpha' = \pm a\sqrt{\frac{1 - C}{6C}}$$

ou

$$\beta = \beta' = 0.$$

Ainsi il n'y a que les conjuguées circonscrites à l'enveloppe imaginaire qui coupent la courbe réelle.

La figure représente celle dont la caractéristique est $\frac{4}{5}$.

Cela posé, nous prendrons pour valeur initiale de x une valeur réelle, x_0, plus grande que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, égale à OC par exemple. A cette

valeur de x correspondront pour y deux valeurs imaginaires que nous désignerons par t_0, u_0, qui fourniront les points B et B_1 de la conjuguée $C = \infty$ et une valeur réelle v_0 qui fournira le point B_2 de la courbe réelle.

x variant ensuite d'une manière continue, les trois valeurs de y varieront elles-mêmes d'une manière continue, et nous désignerons par t, u, v ces trois fonctions.

Si x prend une valeur $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ infiniment voisine de x_0, $\alpha - x_0$ et β étant infiniment petits, les trois valeurs de y différeront peu de t_0, u_0, v_0; mais comme les parties imaginaires de t_0 et de u_0 étaient finies et de signes contraires, elles resteront encore de signes contraires; les deux points $[x, t]$, $[x, u]$ se transporteront donc sur des conjuguées tangentes à la courbe réelle en des points situés l'un au-dessous de L, l'autre au-dessus si β est positif, ou inversement dans le cas contraire.

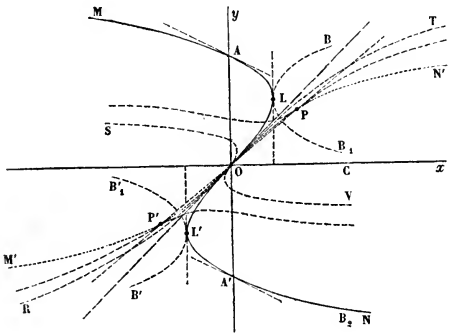


Fig. 12.

Mais d'ailleurs le point $[x, t]$ sera encore sur la branche supérieure de la conjuguée qui le contiendra et le point $[x, u]$ sur la branche inférieure.

Quant au point $[x, v]$, il se sera transporté sur une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point voisin de B_2.

Il importerait peu de savoir ce qu'il est devenu, mais, pour ne laisser aucune difficulté sans solution, nous chercherons de quel côté il se trouvera par rapport au point de contact de la conjuguée qui le contiendra avec la courbe réelle.

Comme nous supposons $\alpha - x_0$ et β infiniment petits, nous pourrons réduire $v - v_0$ à

$$-\frac{a^2}{3v_0^2 - a^2}(\alpha - x_0 + \beta\sqrt{-1});$$

or la partie imaginaire de cette différence, qui sera la partie imaginaire de v, sera

$$-\frac{a^2}{3v_0^2-a^2}\beta\sqrt{-1},$$

et comme v_0 est plus grand en valeur absolue que le double de l'ordonnée du point L qui satisfait à l'équation

$$3y^2-a^2=0,$$

$3v_0^2-a^2$ étant positif, la partie imaginaire de v sera de signe contraire à β, négative par conséquent si, comme nous le supposerons, β est positif.

Cela étant, si, sans changer la direction de l'axe des x, nous prenions pour nouvel axe des y la partie supérieure d'une parallèle, menée par l'origine, à la tangente à la courbe réelle au point où la touche la conjuguée à laquelle appartient le point $[x, v]$: les formules de transformation seraient

$$x=x'+y'\cos \mathrm{Y'X},$$
$$y=y'\sin \mathrm{Y'X};$$

x' serait réel, mais sin Y'X étant positif, la partie imaginaire de y', ou v', serait de même signe que la partie imaginaire de y ou v, c'est-à-dire négative : le point $[x, v]$ sera donc sur une branche inférieure.

Nous pouvons maintenant suivre de proche en proche les mouvements des trois points $[x, t]$, $[x, u]$, $[x, v]$.

Nous supposerons d'abord que x n'atteigne pas une valeur qui amènerait un des trois points sur la conjuguée $C=1$.

Tant que β restera positif, le point $[x, t]$ restera sur une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de OL et sur la branche supérieure de cette conjuguée.

Le point $[x, u]$ restera sur une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de LM et sur la branche inférieure de cette conjuguée.

Enfin le point $[x, v]$ restera sur une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de L'N et sur la branche inférieure de cette conjuguée.

Si β passe par zéro et change de signe à un moment où α soit encore plus grand que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, t et u étant restés imaginaires, les points $[x, t]$, $[x, u]$ seront restés à des distances finies de la courbe réelle ; les signes des caractéristiques des conjuguées auxquelles ils appartiendront auront changé, mais ces points seront encore le premier sur une branche supérieure, le second sur une branche inférieure, et si x revenait à sa valeur initiale sans que β eût passé de nouveau par zéro, les trois points reviendraient à leurs places primitives.

Au contraire, si β passe par zéro, α étant compris entre 0 et $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, à ce moment les trois points se trouveront sur la courbe réelle, et si β change de signe, tous trois changeront de branches; par conséquent, si x revenait à sa valeur initiale sans que β eût passé de nouveau par zéro dans l'intervalle, t prendrait la place de u, u celle de t, et v seul reviendrait à sa valeur initiale.

Revenons au point de départ $x = x_0$, et supposons toujours qu'aucun des trois points ne traverse la conjuguée $C = 1$, pour aller se rendre sur les conjuguées de la seconde série.

Tant que x ne passera pas par zéro, les deux points $[x, t]$, $[x, u]$ resteront toujours sur les conjuguées qui touchent la courbe réelle sur OM et le point $[x, v]$ sur celle qui la touche sur ON; les points $[x, t]$, $[x, u]$ pourront s'échanger entre eux un nombre indéfini de fois, mais, lorsque x reviendra à sa valeur initiale, le point $[x, v]$ reprendra toujours sa position primitive.

Supposons donc que x passe par zéro, et que ce soit, par exemple, le point $[x, t]$ qui passe à l'origine en suivant un chemin tangent à la droite $y = x$; si x change de signe en passant par zéro, le point $[x, t]$ arrivera sur les conjuguées qui touchent la courbe réelle sur ON et se trouvera par rapport au point $[x, v]$ dans la même situation où il était précédemment par rapport au point $[x, u]$. Si β passe par zéro, α étant compris entre 0 et $-\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, les points $[x, v]$ et $[x, t]$ changeront tous les deux de branches et pourront ensuite venir occuper chacun la place qu'avait précédemment l'autre, de sorte que si x revenait à sa valeur primitive x_0, en repassant de nouveau par zéro, v prendrait la valeur de t, t celle de v, et u reprendrait sa valeur initiale.

Nous avons ainsi fait s'échanger entre eux les points $[x, t]$ et $[x, u]$ en laissant d'abord la partie réelle de x positive; nous avons ensuite fait s'échanger les points $[x, t]$ et $[x, v]$ ou $[x, u]$ et $[x, v]$ en leur faisant traverser successivement l'origine des coordonnées qui était le seul point qui pût servir de passage entre les demi-conjuguées qui touchent la courbe réelle sur OM et celles qui la touchent sur ON; nous allons maintenant faire passer nos trois points sur les conjuguées circonscrites à l'enveloppe imaginaire.

Chaque fois qu'un des trois points passera sur la conjuguée $C = 1$, il pourra changer de série de conjuguées, et il sera facile de s'assurer de ce qu'il en est, car la marche de x étant définie, la différentielle de cette variable étant par conséquent connue, la différentielle de y pourra l'être aussi, et il sera toujours aisé de voir si $d\beta'$ surpasse ou non $d\beta$, c'est-à-dire si C a augmenté ou diminué.

Nous avons vu que la conjuguée $C = 1$ est définie par la relation

$$3a^4\alpha^2 = \beta^2\left(\frac{8}{3}\beta^2 + a^2\right)^2;$$

chaque fois donc que, α et β continuant de satisfaire à la relation $\varphi\ (\alpha, \beta) = 0$,

$$3a^4\alpha^2 - \beta^2\left(\frac{8}{3}\beta^2 + a^2\right)^2$$

changera de signe, un des trois points $[x, t]$, $[x, u]$, $[x, v]$ pourra changer de catégorie de conjuguées : il importera alors de savoir lequel des trois points subira ce déplacement ; mais cette question ne présentera jamais de difficulté, parce qu'ayant suivi jusque-là les passages de β par zéro, on saura toujours sur quelles branches se trouvent les trois points.

Ainsi en reprenant par exemple le même point de départ $x = x_0$, il est évident d'abord que le point $[x, v]$ ne pouvant parvenir à la conjuguée $C = 1$, sans traverser la conjuguée $C = \infty$, auquel cas l'un des points $[x, t]$, $[x, u]$ y serait venu aussi, ce qui exigerait ou qu'il eût traversé l'origine, ou qu'il eût momentanément passé sur les conjuguées de la seconde catégorie, pour les quitter ensuite, il est évident, disons-nous, que le point $[x, v]$ ne pourra pas arriver le premier sur la conjuguée $C = 1$.

D'un autre côté, quant aux deux points $[x, t]$ et $[x, u]$, il est évident que si β a d'abord reçu des valeurs positives et n'a pas changé de signe avant que

$$3a^4\alpha^2 - \beta^2\left(\frac{8}{3}\beta^2 + a^2\right)^2$$

devînt nul, ce sera le point $[x, t]$ qui passera sur la conjuguée $C = 1$.

Supposons donc que le point $[x, t]$ ait passé sur les conjuguées de la seconde catégorie : tant qu'il y restera et que α ne changera pas de signe, il restera du même côté du point de contact de sa conjuguée avec l'enveloppe imaginaire ; et si au contraire α change de signe, le point $[x, t]$ changera de branche sur sa conjuguée. En suivant donc les passages de α par zéro, on saura toujours où se trouve le point $[x, t]$; et s'il doit repasser sur les conjuguées de la première catégorie, on saura quelle branche de la conjuguée $C = 1$ il aura dû traverser.

283. Nous prendrons pour dernier exemple l'équation

$$y^4 + x^4 = a^4$$

qui présente des particularités remarquables.

Si x est imaginaire et représenté par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, y^4 est généralement imaginaire et de la forme $A + B\sqrt{-1}$; les deux valeurs de y^2

$$y^2 = \pm\left(A' + B'\sqrt{-1}\right)$$

sont déterminées par les équations

$$A'^2 - B'^2 = A$$

et

$$2A'B' = B,$$

qui montrent que ni A' ni B' ne sont nuls quand B ne l'est pas.

Les valeurs de

$$y = \pm (A'' + B''\sqrt{-1})$$

sont ensuite déterminées par les équations

$$A''^2 - B''^2 = A'$$

et

$$2A''B'' = B',$$

qui montrent de même que ni A'' ni B'' ne sont nuls si B' ne l'est pas.

On voit aisément que les quatre valeurs de y se distinguent les unes des autres par les signes de leurs parties réelles et imaginaires, ces signes fournissent toujours les quatre combinaisons possibles, lorsque B est différent de zéro.

La valeur de B est

$$4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3,$$

elle n'est nulle que dans les hypothèses $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = \pm\beta$; mais dans la première il faut que β soit moindre que a pour que B' soit aussi nul, et dans la seconde il faut que α soit moindre que a.

A'' et B'' ne peuvent en conséquence changer de signes qu'aux époques où α passe par zéro, β étant moindre que a, où β passe par zéro, α étant moindre que a, enfin où $\alpha = \pm\beta$.

Dans chacun de ces trois cas, deux valeurs de y sont réelles et les autres imaginaires sans parties réelles.

Les hypothèses $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = +\beta$, $\alpha = -\beta$ devant jouer un rôle important dans la discussion qui va nous occuper, nous donnerons d'avance le tableau des valeurs de la différentielle de y dans les cas correspondants.

Premier cas.

$$\alpha = 0, \quad x = \beta\sqrt{-1}, \quad \beta < a.$$

Les valeurs de y sont

$$\pm\sqrt[4]{a^4 - \beta^4} \quad \text{et} \quad \pm\sqrt[4]{a^4 - \beta^4}\,\sqrt{-1},$$

et celles de dy

$$\pm\frac{\beta^3\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{(a^4-\beta^4)^3}}(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}) \text{ et } \mp\frac{\beta^3}{\sqrt[4]{(a^4-\beta^4)^3}}(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}),$$

d'où l'on voit que celle des deux parties de y qui vient de s'annuler avec α, change aussi de signe avec lui.

Deuxième cas.

$$\alpha = 0, \quad x = \beta\sqrt{-1}, \quad \beta > a.$$

Les valeurs de y sont

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\beta^4 - a^4}\left|\begin{array}{r} 1+\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} \end{array}\right|$$

celles de $\frac{dy}{dx}$ sont

$$\frac{\beta^3}{\sqrt{2}\sqrt[4]{(\beta^4 - a^4)^3}}\left|\begin{array}{r} +1-\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} \\ +1+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} \end{array}\right|$$

et celles de dy

$$\frac{\beta^3}{\sqrt{2}\sqrt[4]{(\beta^4 - a^4)^3}}\left|\begin{array}{r} +(d\alpha + d\beta) - (d\alpha - d\beta)\sqrt{-1} \\ -(d\alpha - d\beta) - (d\alpha + d\beta)\sqrt{-1} \\ +(d\alpha - d\beta) + (d\alpha + d\beta)\sqrt{-1} \\ -(d\alpha + d\beta) + (d\alpha - d\beta)\sqrt{-1} \end{array}\right|$$

En comparant ce tableau à celui des valeurs de y, on voit que, dans celles où $\alpha' = \beta'$, $\alpha' - \beta'$ change de signe avec α, et que dans celles où $\alpha' = -\beta'$, c'est $\alpha' + \beta'$ qui change de signe avec α. Dans les deux cas, il y a interversion d'ordre dans les valeurs absolues de α' et de β'.

Troisième cas.

$$\beta = 0, \quad x = \alpha, \quad \alpha < a.$$

Les valeurs de y sont

$$\pm\sqrt[4]{a^4 - \alpha^4} \quad \text{et} \quad \pm\sqrt[4]{a^4 - \alpha^4}\sqrt{-1},$$

et celles de dy

$$\mp\frac{\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4 - \alpha^4)^3}}(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad \mp\frac{\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4 - \alpha^4)^3}}(-d\beta + d\alpha\sqrt{-1}),$$

d'où l'on voit que celle des deux parties de y qui vient de s'annuler avec β change aussi de signe avec lui.

Quatrième cas.

$$\beta = 0, \quad x = \alpha, \quad \alpha > a.$$

Les valeurs de y sont

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\alpha^4 - a^4}\left|\begin{array}{r} 1+\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} \end{array}\right|$$

celles de $\frac{dy}{dx}$ sont

$$\frac{\alpha^3}{\sqrt{2}\sqrt[4]{(\alpha^4 - a^4)^3}}\left|\begin{array}{r} 1+\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} \end{array}\right|$$

et celles de dy

$$\frac{\alpha^3}{\sqrt{2}\sqrt[4]{(\alpha^4 - a^4)^3}}\left|\begin{array}{r} (d\alpha - d\beta) + (d\alpha + d\beta)\sqrt{-1} \\ (d\alpha + d\beta) - (d\alpha - d\beta)\sqrt{-1} \\ -(d\alpha + d\beta) + (d\alpha - d\beta)\sqrt{-1} \\ -(d\alpha - d\beta) - (d\alpha + d\beta)\sqrt{-1} \end{array}\right|$$

En comparant ce tableau à celui des valeurs de y, on voit que dans celles où $\alpha' = \beta'$, $\alpha' - \beta'$ change de signe avec β, et que dans celles où $\alpha = -\beta'$, c'est $\alpha' + \beta'$ qui change de signe avec β. Dans les deux cas il y a interversion d'ordre dans les valeurs absolues de α' et de β'.

Cinquième cas.

$$\alpha = +\beta, \quad x = \alpha\left(1+\sqrt{-1}\right).$$

Les valeurs de y sont

$$\pm\sqrt[4]{a^4 + 4\alpha^4} \quad \text{et} \quad \pm\sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4 + 4\alpha^4},$$

celles de $\frac{dy}{dx}$ sont

$$\pm\frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4 + 4\alpha^4)^3}}\left(1-\sqrt{-1}\right), \quad \text{et} \quad \pm\frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4 + 4\alpha^4)^3}}\left(1+\sqrt{-1}\right),$$

et celles de dy

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4+4\alpha^4)^3}} \left[d\alpha + d\beta - (d\alpha - d\beta)\sqrt{-1} \right]$$

et

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4+4\alpha^4)^3}} \left[d\alpha - d\beta + (d\alpha + d\beta)\sqrt{-1} \right].$$

D'où l'on voit que celle des parties de y qui s'annule avec $\alpha - \beta$ change de signe avec cette différence.

Sixième cas.

$$\alpha = -\beta, \quad x = \alpha\left(1 - \sqrt{-1}\right).$$

Les valeurs de y sont, comme dans le cas précédent,

$$\pm \sqrt[4]{a^4 + 4\alpha^4} \quad \text{et} \quad \pm \sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4 + 4\alpha^4};$$

mais les dérivées et les différentielles de y changent.

Les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4+4\alpha^4)^3}} \left(1 + \sqrt{-1}\right) \quad \text{et} \quad \pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4+4\alpha^4)^3}} \left(-1 + \sqrt{-1}\right),$$

et celles de dy

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4+4\alpha^4)^3}} \left[d\alpha - d\beta + (d\alpha + d\beta)\sqrt{-1} \right]$$

et

$$\pm \frac{2\alpha^3}{\sqrt[4]{(a^4+4\alpha^4)^3}} \left[-(d\alpha + d\beta) + (d\alpha - d\beta)\sqrt{-1} \right].$$

D'où l'on voit que celle des parties de y qui s'annule avec $\alpha + \beta$ change de signe avec cette somme.

Nous pourrions considérer la discussion comme terminée là, puisque α' et β' ne peuvent s'annuler et changer de signes que dans les hypothèses $\alpha = 0, \beta = 0$, $\alpha = \pm\beta$, et qu'on sait ce qui leur arrive dans chacun de ces cas ; mais nous allons chercher à suivre la marche du point $[x, y]$ sur la courbe réelle et sur ses conjuguées.

La courbe représentée par l'équation $y^4 + x^4 = a^4$ est comprise entre les droites $x = \mp a$, $y = \mp a$; elle renferme dans son intérieur le cercle $y^2 + x^2 = a^2$.

Tant que x ne prend que des valeurs réelles comprises entre $-a$ et $+a$, les valeurs de y sont

$$\pm\sqrt[4]{a^4 - x^4} \quad \text{et} \quad \pm\sqrt{-1}\,\sqrt[4]{a^4 - x^4},$$

la portion de la conjuguée à abscisses réelles, qui s'étend entre les droites $x = \mp a$ ne se distingue donc pas de la courbe réelle.

Lorsque x prend des valeurs réelles non comprises entre $-a$ et $+a$, les quatre valeurs de y sont

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x^4 - a^4}\left|\begin{array}{r} 1+\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} \end{array}\right.$$

La conjuguée à abscisses réelles, en dehors des parallèles $x = \mp a$, se compose donc de l'axe des x doublé et de la courbe qui en coordonnées réelles aurait pour équation

$$y^4 - 4x^4 = -4a^4.$$

La conjuguée dont les ordonnées sont réelles est égale à la conjuguée à abscisses réelles, seulement elle s'appuie sur l'axe des y au lieu de s'appuyer sur l'axe des x.

Si des valeurs réelles, $x = m$, $y = n$, des coordonnées, satisfont à l'équation

$$y^4 + x^4 = a^4,$$

les mêmes valeurs affectées du signe $\sqrt{-1}$, $x = m\sqrt{-1}$, $y = n\sqrt{-1}$ y satisfont aussi.

La caractéristique de la solution $x = m\sqrt{-1}$, $y = n\sqrt{-1}$ est $\frac{n}{m}$; ainsi la conjuguée C passe par le point où la courbe réelle est coupée par la droite $y = Cx$, et elle la touche imaginairement en ce point, car la tangente à la courbe réelle au point $x = m$, $y = n$ est représentée par l'équation

$$y - n = -\frac{m^3}{n^3}(x - m),$$

et la tangente à la conjuguée $C = \frac{n}{m}$ au point $x = m\sqrt{-1}$, $y = n\sqrt{-1}$ l'est par l'équation

$$y - n\sqrt{-1} = -\frac{m^3}{n^3}(x - m\sqrt{-1}),$$

qui ne fournit que la droite

$$y - n = -\frac{m^3}{n^3}(x - m).$$

La même conjuguée touche aussi la courbe réelle au point où la tangente à cette dernière est parallèle à $y = Cx$, mais les coordonnées de ce point sont réelles aussi bien sur la conjuguée que sur la courbe réelle.

La courbe réelle se trouve donc être à la fois l'enveloppe réelle et l'enveloppe imaginaire de toutes ses conjuguées.

Les asymptotes sont

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{array}{c} 1+\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} \end{array} \right|$$

et si l'on se rappelle que la droite représentée dans le système C par l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})\, x$$

est, en coordonnées réelles,

$$y = \left(m + n + \frac{2n^2}{m - n - C}\right) x,$$

on en conclura que les asymptotes de la conjuguée C sont fournies par les équations

$$y = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{C}\right) x, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2} - C}\, x,$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2} + C}\, x, \qquad y = -\left(\sqrt{2} + \frac{1}{C}\right) x.$$

Chaque conjuguée se compose en réalité de quatre arcs indéfinis dont deux touchent la courbe réelle en des points réels, tandis que les deux autres la touchent en des points imaginaires.

Nous pourrons cependant, pour simplifier le langage, considérer chaque conjuguée comme formée de la réunion de deux conjuguées de même caractéristique, mais de catégories différentes : la conjuguée de la première catégorie étant composée des deux arcs qui touchent la courbe réelle en des points réels, et l'autre des deux autres arcs.

Les quatre branches indéfinies qui composent les deux arcs d'une même catégorie ont toujours pour asymptotes deux droites imaginaires conjuguées, soit

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{-1})\, x \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{-1})\, x,$$

soit

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\sqrt{-1})\,x \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-\sqrt{-1})\,x\,;$$

mais chacun de ces couples alterne d'une catégorie à l'autre lorsque C passe par zéro ou par l'infini ; de telle sorte que les deux asymptotes

$$y = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{C}\right)x \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2} - C}\,x$$

appartiennent à la première catégorie quand C est négatif et à la deuxième quand C est positif, et inversement pour les deux autres. Cela se voit aisément si l'on fait la figure.

En effet, quand par exemple C devient infini, d'une part les asymptotes de catégories différentes

$$y = \frac{1}{\sqrt{2} - C}\,x \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2} + C}\,x$$

se confondent en même temps que les arcs de catégories différentes auxquels elles appartiennent ; car la partie Ax de l'axe des x, représentée par

$$y = \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x^4 - a^4}, \qquad [x \text{ réel}, \quad > a],$$

peut être considérée à la fois comme une position limite d'une branche d'une conjuguée de la première catégorie dont la caractéristique négative serait devenue infinie et d'une branche d'une conjuguée de la deuxième catégorie dont la caractéristique positive serait devenue aussi infinie ; de même que la même partie Ax de l'axe des x, représentée par

$$y = \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x^4 - a^4}, \qquad [x \text{ réel}, \quad > a],$$

peut être considérée à la fois comme une position limite d'une branche d'une conjuguée de la première catégorie dont la caractéristique positive serait devenue infinie, et d'une branche d'une conjuguée de la deuxième catégorie dont la caractéristique négative serait devenue aussi infinie.

De même, deux branches opposées de la conjuguée [$C = \infty$], qui ont pour asymptote commune

$$y = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{C}\right)x$$

ou

$$y = -\left(\sqrt{2} + \frac{1}{C}\right) x,$$

peuvent être considérées chacune comme les positions limites de branches de conjuguées des deux catégories dont les caractéristiques de signes contraires seraient devenues infinies.

Ainsi la branche de la conjuguée $C = \infty$ qui est située dans le premier angle des axes est à la fois la limite des positions d'une branche d'une conjuguée de la première catégorie dont la caractéristique négative serait devenue infinie, et d'une branche d'une conjuguée de la deuxième catégorie dont la caractéristique positive serait devenue infinie ; et il en est de même de la branche de la même conjuguée qui est située dans le troisième angle des axes.

Ce que nous venons de dire de l'axe des x et de la conjuguée $C = \infty$ pourrait au reste se répéter de l'axe des y et de la conjuguée $C = 0$.

Ces faits s'expliquent parce que les deux catégories de conjuguées ne se distinguent l'une de l'autre qu'en ce que celles de la première catégorie touchent la courbe réelle en des points réels, tandis que celles de la seconde la touchent en des points imaginaires ; or les deux conjuguées $C = \infty$, $C = 0$ touchent la courbe réelle en des points réels qui se dédoubleront chacun en un point réel et un point imaginaire pour peu que change C, d'où il résulte que ces deux conjuguées peuvent être considérées comme appartenant à la fois aux deux catégories. Il en est de même des parties de l'axe des x et de l'axe des y qui sont représentées dans l'équation proposée.

Il résulte de ce qu'on vient de voir que l'axe des x et l'axe des y, ainsi que les conjuguées $C = \infty$, $C = 0$, appartenant aux deux catégories de conjuguées, fourniront au point $[x, y]$ un passage pour aller des conjuguées de l'une sur celles de l'autre.

C'est d'ailleurs le seul chemin qu'il pourra prendre pour effectuer ce passage, tant qu'on lui interdira les points $y = 0$, $x = \pm a$. Mais autrement, s'il se trouvait sur une conjuguée de la première catégorie, on pourrait l'amener au point où cette conjuguée touche la courbe réelle, le faire passer sur la courbe réelle en l'un des points $y = 0$, $x = \pm a$, où son ordonnée, devenant nulle, pourrait prendre ensuite des valeurs imaginaires sans parties réelles, l'amener, en lui faisant parcourir la conjuguée $C = \infty$, en l'un des points $x = 0$, $y = \pm a\sqrt{-1}$, où son abscisse, devenant nulle, pourrait prendre ensuite des valeurs imaginaires sans parties réelles, le faire passer par les points de contact successifs des conjuguées de la seconde catégorie avec la courbe réelle, et l'amener ainsi au point de contact avec cette même courbe de l'arc sur lequel on voudrait le transporter et enfin lui faire suivre une des branches de cet arc.

Avant d'aller plus loin, nous chercherons à fixer les conditions dans lesquelles le point $[x, y]$, placé sur l'axe des x, représenté par l'une des équations

$$y = \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x^4-a^4},$$

$$y = \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x^4-a^4},$$

dans lesquelles x recevrait seulement des valeurs réelles plus grandes que a, ou sur l'une des conjuguées $C=\infty$, $C=0$, passe sur les conjuguées de l'une ou de l'autre catégorie.

1° La partie de l'axe des x que représente l'équation

$$y = \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x^4-a^4}$$

figure à la fois, dans leurs positions limites, une branche d'une conjuguée de la première catégorie, dont la caractéristique négative serait devenue infinie, et une branche d'une conjuguée de seconde catégorie ayant sa caractéristique positive.

Par conséquent le point $[x, y]$, en passant sur l'axe des x, représenté par l'équation

$$y = \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x^4-a^4},$$

se transportera sur une conjuguée de la première ou de la seconde catégorie, suivant que sa caractéristique deviendra négative ou positive.

2° La même partie de l'axe des x, que représente aussi l'équation

$$y = \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x^4-a^4}$$

figure à la fois, dans leurs positions limites, une branche de première catégorie ayant sa caractéristique positive infinie, et une branche de seconde catégorie ayant sa caractéristique négative infinie.

Par conséquent le point $[x, y]$, en passant sur l'axe des x, représenté par l'équation

$$y = \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x^4-a^4},$$

se transportera sur une conjuguée de la première ou de la seconde catégorie, suivant que sa caractéristique deviendra positive ou négative.

3° Les branches de la conjuguée $C=\infty$, qui occupent le premier et

le troisième angle des axes, figurent, dans leurs positions limites, une branche de première catégorie dont la caractéristique négative serait devenue infinie, et une branche de seconde catégorie dont la caractéristique serait infinie, positive.

Au contraire, les branches qui occupent le second et le quatrième angle, figurent, dans leurs positions limites, des branches de première et de seconde catégorie, dont les caractéristiques positive et négative seraient devenues infinies.

Par conséquent le point $[x, y]$, en passant sur la conjuguée $C = \infty$, se transportera, si sa caractéristique devient négative, sur une conjuguée de la première catégorie, lorsqu'il se trouvera dans le premier ou le troisième angle des axes, et sur une conjuguée de la seconde catégorie, s'il est dans le deuxième ou le quatrième angle. Ce serait le contraire si sa caractéristique devenait positive.

Les passages du point $[x, y]$ sur l'axe des y, ou sur la conjuguée $C = 0$, donneraient lieu à des conclusions analogues.

Il est maintenant facile de suivre la marche du point $[x, y]$, correspondant à un chemin quelconque parcouru par x.

Prenons pour point de départ une valeur réelle de x, m, plus grande que a : les quatre valeurs correspondantes de y seront

$$s = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \sqrt{-1}\right)\sqrt{m^4 - a^4},$$

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1 + \sqrt{-1}\right)\sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1 - \sqrt{-1}\right)\sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \sqrt{-1}\right)\sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

Supposons le point $[x, y]$ parti de

$$x = m, \qquad y = s = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \sqrt{-1}\right)\sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

il se trouvera alors en un point M de la branche de la conjuguée $C = \infty$ qui occupe le premier angle des axes, et si β, qui est actuellement nul, prend une valeur positive infiniment petite, comme β', qui est fini et positif, ne pourra devenir brusquement négatif, C prendra des valeurs positives, le point $[x, y]$ passera donc sur une conjuguée voisine de la conjuguée $C = \infty$, appartenant à la deuxième catégorie, ayant sa caractéristique positive et tangente à la courbe réelle en un point **P**, voisin du sommet $x = 0$, $y = a\sqrt{-1}$, mais situé à droite de ce sommet.

Si x revenait à sa valeur initiale sans qu'aucune des circonstances $\beta = 0$ avec $\alpha < a$, $\alpha = 0$, $\alpha = \pm\beta$ se fût présentée dans l'intervalle, y reviendrait aussi à sa valeur initiale : supposons donc que ces différentes circonstances se présentent, séparément d'abord.

Si, après avoir crû positivement, β redevient nul, α étant alors moindre que a, le point $[x, y]$ à ce moment se trouvera sur la conjuguée $C = \infty$, et si β et par suite C changent de signes, il passera sur une branche tangente à la courbe réelle en un point situé à gauche du sommet $x = 0$, $y = a\sqrt{-1}$; de sorte que si x revenait à sa première valeur sans qu'aucune des circonstances $\beta = 0$ avec $\alpha < a$, $\alpha = 0$, $\alpha = \pm\beta$ se fût présentée de nouveau dans l'intervalle, y prendrait la valeur t, ou $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \sqrt{-1}) \sqrt[4]{m^4 - a^4}$, et le point $[x, y]$ viendrait se placer sur l'axe des x représenté par l'équation

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x^4 - a^4}.$$

Pendant ce temps le point $[x, y]$ qui serait parti de la position initiale $[x, u]$, se sera transporté sur une conjuguée de la deuxième catégorie ayant sa caractéristique négative, aura passé sur la conjuguée $C = \infty$ en même temps que le point qui venait de $[x, s]$, aura changé de branche en même temps que lui ; et finalement sera arrivé en $[x, v]$.

Le point parti de $[x, t]$ se sera d'abord transporté sur une conjuguée de la première catégorie, ayant sa caractéristique positive, sur la courbe réelle au moment où β aura passé par zéro, α étant moindre que a ; et enfin sera venu en $[x, u]$.

De même le point parti de $[x, v]$ se sera d'abord transporté sur une conjuguée de la première catégorie ayant sa caractéristique négative, sur la courbe réelle au moment où β aura passé par zéro, α étant moindre que a, il aura changé de branche sur une conjuguée toujours de la première catégorie, ayant toujours sa caractéristique négative, quand β aura changé de signe ; et enfin sera venu en $[x, s]$.

En résumé, pendant que x sera revenu à sa valeur initiale, chacun des points

$$[x, s], \quad [x, t], \quad [x, u], \quad [x, v],$$

sera venu occuper la place du suivant, et le dernier celle du premier.

Si x repassait encore par une série pareille de valeurs, les mêmes faits se reproduiraient dans le même ordre ; de sorte qu'en faisant suivre à x quatre fois le même parcours, on ramènerait chaque point à sa position initiale.

Supposons maintenant que α puisse passer par zéro et changer de signe : en même temps il deviendra plusieurs fois égal à $\pm\beta$, de sorte que nous aurons examiné tous les cas qui peuvent se présenter.

Reprenons pour x la même valeur initiale $x = m > a$, et supposons encore que β prenne d'abord le signe $+$, que nous lui conserverons d'ailleurs dans tout ce qui suivra, puisque nous avons examiné les cas où il passe par zéro et change de signe ; il est évident que nous aurions à répéter les mêmes choses dans un autre ordre, si nous supposions au contraire que β fût d'abord et restât négatif.

Les quatre valeurs initiales de y seront toujours

$$s = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \sqrt{-1}\right)\sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1 + \sqrt{-1}\right)\sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1 - \sqrt{-1}\right)\sqrt[4]{m^4 - a^4},$$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \sqrt{-1}\right)\sqrt[4]{m^4 - a^4}.$$

Avant que α devienne nul, il faudra qu'il devienne égal à β ; à ce moment les quatre valeurs de y seront

$$\pm\sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4} \quad \text{et} \quad \pm\sqrt{-1}\,\sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4} :$$

comme α' ni β' n'auront pas encore jusque-là passé par zéro, celle de ces variables qui aura conservé une valeur finie, aura en même temps gardé son signe primitif ; cette remarque permettra de décider en partie des valeurs qu'auront prises respectivement les quatre fonctions de x que représente y.

Ainsi s ne pourra être devenu que

$$+\sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4} \quad \text{ou} \quad +\sqrt{-1}\,\sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4},$$

t sera

$$-\sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4} \quad \text{ou} \quad +\sqrt{-1}\,\sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4},$$

u sera

$$-\sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{-1}\,\sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4},$$

enfin v sera

$$+\sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{-1}\,\sqrt[4]{a^4 + 4\beta^4}.$$

Pour achever de résoudre la question, nous remarquerons que dans chacune des quatre valeurs de y, α' et β', égaux en valeur absolue au point de départ, n'auront pas repassé par l'égalité, puisque ni α ni β ne

seront redevenus nuls ; de telle sorte que l'ordre établi au commencement n'aura pas pu s'intervertir ensuite.

Or β qui était d'abord nul, prenant d'abord un accroissement positif, le tableau des valeurs de dy montre que : 1° dans la fonction de x qui part de la valeur s, et où $\alpha' = \beta'$, $d\beta'$ est plus grand que $d\alpha'$, de sorte que β' devient plus grand que α' ; 2° que dans celle qui part de la valeur t, et où $\alpha' = -\beta'$, α' ayant d'ailleurs le signe — et par suite β' le signe +, $d\alpha'$ et $d\beta'$ se composent de deux parties égales et de signes contraires qui, en venant s'ajouter à α' et β', ne troubleraient pas l'égalité $\alpha' = -\beta'$, et de deux parties aussi égales, mais négatives toutes deux, parce que $d\beta$ est positif, et qui, venant s'ajouter à α' et β', font prendre la supériorité à α', de sorte que $-\alpha'$ devient plus grand que β'; 3° que dans la valeur de y qui part de la valeur u, où α' et β' sont égaux, $d\alpha'$ est plus grand que $d\beta'$, de sorte que α' devient plus grand que β'; 4° enfin que dans la valeur de y qui part de la valeur v, où $\alpha' = -\beta'$, α' ayant d'ailleurs le signe +, c'est encore α' qui prend l'avance sur $-\beta'$.

Il en résulte qu'au moment où α devient égal à β, s devient

$$+\sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4+4\beta^4},$$

t devient

$$-\sqrt[4]{a^4+4\beta^4},$$

u devient

$$-\sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4+4\beta^4},$$

et v devient

$$+\sqrt[4]{a^4+4\beta^4}.$$

Supposons maintenant que α devienne nul, β étant alors moindre que a, les quatre valeurs de y seront

$$\pm\sqrt[4]{a^4-\beta^4} \quad \text{et} \quad \pm\sqrt{-1}\sqrt[4]{a^4-\beta^4},$$

et il s'agit d'attribuer ces valeurs aux quatre fonctions de x qui sont parties des valeurs initiales s, t, u, v.

Or dans aucune de ces quatre fonctions α' n'a pu devenir égal à β' en valeur absolue, sans quoi α ou β auraient passé par zéro, ni changer de signe, pour la même raison ; cela exige évidemment qu'elles reprennent chacune pour $\alpha = 0$ la même valeur que pour $\alpha = \beta$.

Enfin supposons que α devienne nul, β étant alors plus grand que a, les quatre valeurs de y seront

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm \sqrt{-1})\sqrt[4]{\beta^4-a^4}.$$

Pour les répartir, nous remarquerons encore que depuis le moment où α est devenu égal à β, α' ni β' n'ont pas pu repasser ni par zéro, ni par l'égalité de valeurs absolues, et comme nous savons d'ailleurs que quand l'ordre de grandeur de α et β change, la partie de y qui s'annule alors, change ensuite de signe, nous en conclurons que s est devenu

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{\beta^4 - a^4}\,(-1+\sqrt{-1}),$$

que t est devenu

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{\beta^4 - a^4}\,(-1-\sqrt{-1}),$$

que u est devenu

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{\beta^4 - a^4}\,(1-\sqrt{-1}),$$

enfin que v est devenu

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{\beta^4 - a^4}\,(1+\sqrt{-1}).$$

On voit que les discussions de ce genre peuvent exiger quelquefois des développements fastidieux; mais les difficultés qu'elles présentent tiennent surtout à la complication de l'équation mise à l'étude. Or on ne pouvait évidemment pas demander que la discussion des lieux imaginaires, représentés par une équation, devînt plus simple que celle du lieu réel; il suffit qu'elle ne soit pas plus compliquée.

CHAPITRE XXII

DE LA SÉRIE DE TAYLOR.

284. Les deux questions auxquelles donne lieu l'emploi de la série de Taylor ont pour objet, la première, de déterminer exactement la région de convergence de cette série ; la seconde, de définir de telle sorte la valeur de la fonction, supposée multiple, qui a été développée, qu'on puisse la reconnaître parmi les racines de l'équation qui lie cette fonction à sa variable, et par conséquent l'obtenir par la résolution même de cette équation, au lieu de la calculer par la sommation des termes de la série.

Ainsi une fonction y étant définie par une équation algébrique entière $f(x, y) = 0$, qui donne m valeurs de cette fonction pour chaque valeur de la variable, il s'agira : 1° de déterminer, pour chaque système de valeurs, x_0, y_0, de x et de y, les limites dans lesquelles la série

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots$$

restera convergente ; 2° d'assigner à la valeur de y, représentée par la suite

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x_1 - x_0) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x_1 - x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

supposée convergente, des caractères qui puissent permettre de la distinguer au milieu des racines de l'équation $f(x_1, y) = 0$.

La solution de la première question permettra l'emploi rationnel de la série au calcul arithmétique de la valeur finale de la fonction ; celle de la seconde servira à fixer la portion d'un lieu à laquelle pourraient s'étendre les conclusions d'une démonstration théorique dans laquelle on aurait substitué la série, à la fonction définie implicitement par une équation qui lui attribuerait plusieurs valeurs.

Mais la méthode de solution appliquée à la première question fournira d'avance la réponse à la seconde, dont, par conséquent, nous n'aurons pas à nous occuper spécialement.

285. L'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots$$

représente un lieu qui se confond dans une étendue plus ou moins grande avec le lieu dont les coordonnées sont x et y.

Nous donnerons le nom de *région de convergence* à la portion du plan que peut parcourir le point $[x, y]$ assujetti à satisfaire à cette équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \ldots,$$

tant que son second membre resterait fini.

286. La théorie élémentaire de la série de Taylor peut se réduire à ces quelques énoncés, assez évidents pour n'exiger aucune démonstration en règle.

Une série à termes imaginaires est la somme de la série des parties réelles de ses termes et du produit par $\sqrt{-1}$ de la série de leurs parties affectées du signe imaginaire.

Pour que la série proposée soit convergente, il faut que les deux séries qui la composent soient elles-mêmes convergentes.

Si le terme général de la série proposée est $a_n + b_n\sqrt{-1}$, il faut, pour que la série soit convergente, que a_n et b_n tendent séparément vers zéro, ce qui s'exprime par cette condition, en apparence simple, mais double en réalité, que $\sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$ tende vers zéro.

Si $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ et $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ ont séparément des limites moindres que 1 en valeur absolue, la série est convergente ; si l'une seulement des limites des rapports précédents dépasse 1 en valeur absolue, la série est divergente. Si l'un des rapports précédents a pour limite 1, la convergence est douteuse.

Si une série est ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable x, le module du terme général dépend du module de x, et tend vers zéro ou vers l'infini, suivant que le module de x est inférieur ou supérieur au module de la valeur de x qui satisfait à l'équation

$$\lim \frac{(a_n)^2 + (b_n)^2}{(a_{n-1})^2 + (b_{n-1})^2} = 1;$$

c'est-à-dire, si μ est la limite vers laquelle tend le module du rapport des coefficients de deux termes consécutifs de la série, suivant que le module de x est inférieur ou supérieur à $\frac{1}{\mu}$.

Le cas où la convergence est douteuse étant écarté, on obtiendra, par rapport à x, l'intervalle dans lequel la série est convergente en résolvant l'équation

$$\lim \frac{(a_n)^2 + (b_n)^2}{(a_{n-1})^2 + (b_{n-1})^2} = 1.$$

Les valeurs de x, dont le module serait moindre que celui qu'on aura trouvé comme solution, seront celles pour lesquelles la série sera convergente. Il en résulte que les points d'un lieu $f(x, y) = 0$, compris dans la région de convergence relative à un système $[x_0, y_0]$ de valeurs initiales de la variable et de la fonction, auront leurs abscisses telles que, retranchées de x_0, elles donnent des différences dont les modules ne dépassent pas une certaine limite.

En d'autres termes : le périmètre de la région de convergence sera composé de points du lieu ayant leurs abscisses telles que, retranchées de x_0, elles donnent des différences dont le module constant soit égal à cette limite.

La question, en ce qui concerne le développement d'une fonction implicite, est de trouver dans la discussion de l'équation $f(x, y) = 0$, qui définit cette fonction, les éléments de la détermination, par rapport à x, de la limite en question.

Si x_0 et y_0 sont les valeurs initiales de x et de y, et que y_0, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$,..., soient finies, y se confond, dans une étendue plus ou moins grande, avec

$$y_0 + \left(\frac{dx}{dy}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \cdots,$$

en ce sens que les deux lieux

$$f(x, y) = 0$$

et

$$y = y_0 + \left(\frac{dx}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \cdots$$

ont en $(x_0\, y_0)$ un contact d'ordre infini, à l'intimité duquel aucune autre condition nouvelle ne saurait être ajoutée.

Si la valeur de y, que représentait la série lorsqu'elle était convergente, doit devenir infinie pour une certaine valeur x_1 de x, la série, pour continuer de représenter cette valeur de y, doit prendre des va-

leurs de plus en plus grandes lorsque x se rapproche de x_1, devenir infinie pour $x = x_1$, et être divergente pour toute valeur de x, telle que le module de $x - x_0$ surpasse celui de $x_1 - x_0$.

Mais il n'est pas nécessaire que la fonction y, représentée par la série, doive devenir infinie, pour une valeur x_1 de x, pour que la série devienne divergente dès que le module de $x - x_0$ surpasserait celui de $x_1 - x_0$.

En effet une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - x_0$, est convergente ou divergente en même temps que toutes ses dérivées et intégrales, puisque le rapport du module d'un terme au module du terme précédent ne change, dans la série dérivée ou dans la série intégrale, que dans le rapport des rangs de deux termes consécutifs, lequel tend vers 1.

La série doit donc être divergente pour toute valeur de x telle que le module de $x - x_0$ surpasse celui de la différence entre x_0 et une valeur x_1, telle que l'une des dérivées de la fonction devienne infinie (1).

Une valeur de la variable, qui rend infinie une des valeurs de la fonction qui en dépend, rend en même temps infinies toutes les dérivées de cette forme de la fonction ; mais les dérivées d'une fonction peuvent ne devenir infinies qu'à partir d'un ordre plus ou moins élevé.

Toutefois, comme la dérivée d'une fonction ne peut devenir infinie qu'autant que cette fonction prenne au moins deux valeurs égales, on

---

(1) Quand on passe de la série à sa dérivée, les termes en x^{m-1} et x^m sont changés en des termes en x^{m-2} et x^{m-1}, et le rapport des modules des termes comparés est multiplié par $\frac{m}{m-1}$ dont la limite est 1 ; de sorte que si, dans la série primitive, le rapport des modules de deux termes consécutifs tend vers une limite plus grande ou plus petite que 1, il en est de même dans la série dérivée, et que les deux séries sont en même temps convergentes ou divergentes.

Mais si le rapport des modules de deux termes consécutifs tend vers 1 dans la proposée, bien qu'il ait la même limite dans la dérivée, ce n'est pas une raison pour que les deux séries, qui sont alors dans le cas douteux, soient en même temps convergentes ou divergentes. La série dérivée est, en effet, toujours plus près de diverger que la proposée, par ces deux motifs que le rapport des modules de termes consécutifs de mêmes rangs y est plus grand, et que ces modules eux-mêmes sont plus grands.

On conçoit donc très-bien que la série dérivée, qui exprime le coefficient angulaire de la tangente à une courbe, puisse devenir divergente, tandis que la série primitive, qui n'exprime que l'ordonnée de cette courbe, serait restée convergente pour la même valeur de l'abscisse, tout en étant sur le point de devenir divergente.

obtiendra tous les points qui pourraient arrêter la convergence de la série en résolvant le système des deux équations

$$f(x, y) = 0,$$
$$\frac{df}{dy} = 0.$$

Pour reconnaître si une valeur de x, à laquelle correspondent p valeurs égales de y, doit être ou non considérée comme pouvant éventuellement former la limite de la région de convergence de la série, il faudra prendre les dérivées des p valeurs de y. Si les dérivées de ces p valeurs sont finies et inégales, la valeur de x ne sera pas critique. Si $p - q$ valeurs de $\frac{dy}{dx}$ se trouvent confondues, il faudra prendre les $p - q$ valeurs correspondantes de $\frac{d^2y}{dx^2}$; si ces $p - q$ valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont toutes finies et inégales, la valeur de x ne sera pas critique. Si $p - q - r$ valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ restent confondues, il faudra prendre les $p - q - r$ valeurs correspondantes de $\frac{d^3y}{dx^3}$; si ces $p - q - r$ valeurs de $\frac{d^3y}{dx^3}$ sont toutes finies et inégales, la valeur de x ne sera pas critique, et ainsi de suite. Si $p - q - r \ldots - t$ valeurs de $\frac{d^ny}{dx^n}$ deviennent infinies, les formes correspondantes de y ne seront pas développables au delà de la valeur considérée de x; mais celles dont les dérivées se seront déjà séparées le resteront. Quant à celles dont les dérivées de l'ordre n ne seraient pas devenues infinies, mais ne se seraient pas encore séparées, il faudra les dériver de nouveau, jusqu'à ce que l'on tombe finalement sur des dérivées distinctes ou infinies.

287. Tel est le degré de simplicité auquel peut être ramenée la théorie de la série de Taylor, en tant du moins qu'on écarte provisoirement la question de la détermination du point d'arrêt.

On retomberait ainsi, si l'on pouvait faire abstraction des valeurs imaginaires de la variable, sur l'énoncé qui avait cours il y a cinquante ans et dont les travaux de Cauchy avaient eu surtout pour effet d'obscurcir l'évidence :

« La série de Taylor reste convergente tant que $x - x_0$ ne dépasse pas la différence entre x_0 et l'abscisse d'un point où les dérivées de la fonction développée deviennent infinies à partir d'un certain ordre. »

La tentative de Cauchy n'a eu effectivement d'autre résultat que d'attirer l'attention sur les valeurs imaginaires de la variable, ce qui amenait naturellement à modifier l'énoncé en ces termes :

La série de Taylor reste convergente tant que le module de $x - x_0$ ne dépasse pas celui de la différence entre x_0 et l'abscisse d'un point où les dérivées de la fonction développée deviennent infinies à partir d'un certain ordre (1).

288. La théorie précédente paraîtrait en défaut si l'on pouvait douter que les dérivées des mêmes ordres de l'ordonnée d'une courbe, par rapport à l'abscisse, se retrouvassent toujours infinies aux mêmes points multiples, quels que fussent les axes auxquels on rapportât la courbe ; car la région de convergence ne pouvant varier brusquement lorsqu'on changerait infiniment peu la direction de l'axe des y, les mêmes points multiples devront toujours présenter le même obstacle au développement de la fonction. Il importait donc de vérifier que la cause assignée à cet obstacle se représenterait toujours.

C'est ce que nous avons fait dans la note de la page 203 du premier

---

(1) J'ai omis à dessein, dans ce qui précède, de tenir compte d'une objection proposée par Cauchy, et fondée sur ce que $e^{-\frac{1}{x^2}}$ et toutes ses dérivées se trouvant nulles pour $x = 0$, le développement d'une fonction quelconque $f(x)$, par la formule de Mac-Laurin, se confondrait identiquement avec celui de la même fonction $f(x)$, augmentée de $e^{-\frac{1}{x^2}}$, de sorte que le développement de $f(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$ serait inexact.

Cette objection n'infirme en rien le fait de l'identité normale d'une fonction, assujettie à la condition de continuité, et de son développement par la série de Taylor, supposée convergente.

Elle prouve seulement qu'outre la précaution, qu'on doit toujours prendre, de ne pas choisir pour la fonction une valeur initiale dont les dérivées soient infinies à partir d'un certain ordre, il faut encore éviter celles dont une partie, quoique différant de zéro pour toute autre valeur de la variable, aurait toutes ses dérivées nulles, pour celle qu'on aurait voulu prendre pour valeur initiale.

En effet, les dérivées d'une fonction ne peuvent pas rester nulles pour toutes les valeurs de sa variable, puisqu'il suffirait d'avoir constaté la nullité constante de la première dérivée pour pouvoir affirmer la constance de la prétendue fonction.

De sorte qu'une fonction qui tomberait sous le coup de l'objection, pour quelques valeurs particulières de la variable, y échapperait pour toutes les autres.

Or le théorème de Taylor ne consiste que dans l'identité normale, et dans de certaines limites, entre la fonction développée, assujettie à la condition de continuité et son développement supposé convergent.

Il convient, au reste, de remarquer que toutes les fonctions imaginables tendraient à présenter la même exception que $e^{-\frac{1}{x^2}}$ si, pour les développer par la formule de Mac-Laurin, on allait choisir une valeur initiale indéfiniment grande de la variable, car les branches infinies de toutes les courbes tendent à devenir droites, de sorte que toutes les dérivées de y par rapport à x, à partir de la seconde, tendent à devenir nulles à mesure qu'on s'éloigne davantage sur ces branches.

L'exception que présente la fonction $e^{-\frac{1}{x}}$ est analogue.

volume de cet ouvrage, en prenant pour exemple la dérivée seconde.

Des démonstrations analogues s'appliqueraient aux autres cas qu'on voudrait examiner.

289. En résumé, contrairement à l'opinion professée jusqu'ici, un point multiple d'un lieu $f(x, y) = 0$ ne peut arrêter le développement de la fonction y qu'autant que les dérivées de cette fonction, sous quelques-unes de ses formes, y deviennent infinies à partir d'un certain ordre.

Hormis ce cas, la série traversera sans embarras le point multiple, et toutes les dérivées de la fonction, après le passage, recevront de la série des valeurs infiniment peu différentes de celles qu'elles avaient auparavant. Elles n'auront subi aucune variation brusque.

Les valeurs critiques de la variable sont donc exclusivement celles auxquelles correspondent des valeurs de la fonction dont les dérivées soient infinies à partir d'un certain ordre (l'ordre zéro correspondant à la fonction elle-même).

Les points qui ont pour abscisses ces valeurs critiques de x et pour ordonnées celles des valeurs correspondantes de y dont les dérivées sont infinies à partir d'un certain ordre sont les points critiques du lieu. Les uns dépendent du choix des axes, ce sont les points de contact des tangentes à la courbe parallèles à l'axe actuel des y ; et les autres en sont indépendants, ce sont quelques-uns des points multiples de la courbe.

Quant à la question de la convergence de la série, elle se réduit à la détermination de celui des points critiques où sera limitée la région de convergence, c'est-à-dire qui se trouvera sur le périmètre même de cette région.

290. Comme on a longtemps admis que la série deviendrait divergente dès que le module de $(x - x_0)$ surpasserait le plus petit des modules des différences entre x_0 et les diverses valeurs critiques de x, il ne sera pas inutile d'établir directement la fausseté de cette hypothèse.

L'énoncé de la proposition ne faisant pas acception de la valeur initiale de y, choisie parmi celles qui correspondent à x_0, l'hypothèse aurait pour conséquence immédiate que si $y_1, y_2, \ldots, y_m$ désignent les valeurs différentes que prend la fonction pour une même valeur x_0 de x, n'offrant aucun caractère exceptionnel, les séries

$$y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \ldots,$$

$$y_2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_2 \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_m + \left(\frac{dy}{dx}\right)_m \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_m \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \ldots,$$

seraient en même temps toutes convergentes ou divergentes, bien que leurs coefficients diffèrent totalement.

Cette conclusion déjà répugne évidemment.

Mais pour rendre le fait complétement évident, supposons que x_0 soit une des valeurs de x auxquelles correspondent quelques valeurs singulières de y: que, par exemple, y_2 soit infini, que $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_3$ soit infini, etc., mais que y_1, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_1$, etc., soient tous finis : la série

$$y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots$$

restera évidemment convergente dans de certaines limites par rapport à x, tandis que quelques-unes des autres seront divergentes pour toutes les valeurs de x.

Or si l'on déplace un peu le point de départ, c'est-à-dire si l'on fait un peu varier x_0, la série dont la région de convergence était finie, restera convergente dans des limites finies encore, et qui même auront infiniment peu varié, tandis que celles qui n'étaient convergentes pour aucune valeur de x n'auront qu'une région de convergence infiniment peu étendue. Ces séries ne seront donc pas toutes convergentes dans les mêmes limites.

291. Ainsi se trouve posée la première des deux questions dont nous avons à nous occuper.

Toutes les valeurs de x pour lesquelles la série reste convergente sont celles qui satisfont à la condition que le module de la différence $x - x_0$ reste inférieur au module de la différence entre x_0 et l'abscisse de l'un des points où les dérivées de la fonction deviennent infinies à partir d'un certain ordre ; mais il reste à déterminer celui de ces points qui, pour chaque système de valeurs de x_0 et de y_0, limite effectivement le développement.

La réponse à faire à cette question, pour suffire aux besoins de la pratique, devrait, s'il était possible, être formulée analytiquement ; mais il paraît peu probable qu'on parvienne à la réduire à de tels termes.

En effet : soient x_0, y_0 les valeurs initiales de la variable et de la fonction et X, Y leurs valeurs particulières au point critique cherché : X dépendra à la fois de x_0 et de y_0, mais il dépendra surtout de la nature de la relation qui lie x et y, car si deux courbes se coupent en un point $[x_0, y_0]$, et que leurs points critiques aient d'ailleurs mêmes abscisses, il n'y aura cependant pas de raisons pour que les développements des ordonnées de ces deux lieux à partir de $x = x_0$ et $y = y_0$ cessent d'être convergents pour les mêmes valeurs de x.

Les conditions à remplir par X et Y ne pouvant donc être que des conditions d'inégalités, la méthode pour en obtenir les valeurs ne pourra évidemment consister qu'en des précautions à prendre pour ne pas les dépasser.

292. Pour qu'un point critique $[x_n, y_n]$ soit le point d'arrêt du développement de la fonction y, à partir de sa valeur y_0, correspondant à la valeur initiale x_0 de x, il faut que y, partant de y_0 et restant assujetti à la continuité, puisse atteindre la valeur y_n sans que le module de $(x - x_0)$ ait dépassé celui de $(x_n - x_0)$ et de plus que y n'ait pas pu atteindre auparavant l'ordonnée d'un autre point critique $[x_p, y_p]$, tel que le module de $(x_p - x_0)$ soit inférieur à celui de $(x_n - x_0)$.

La méthode consistera donc à chercher, relativement à chaque exemple, celui des points critiques avec lequel pourra venir coïncider le point $[x, y]$, parti de x_0, y_0, sans que le module de $(x - x_0)$ ait dépassé le module de la différence entre x_0 et l'abscisse de ce point critique, et à s'assurer d'autre part que le point $[x, y]$ n'aurait pas pu se rendre auparavant à un autre point critique plus voisin, c'est-à-dire tel que le module de la différence entre x_0 et son abscisse fût moindre que celui de la différence entre x_0 et l'abscisse du point éprouvé.

La solution que nous avons donnée dans les deux chapitres précédents de la question de la marche continue d'une fonction connaissant la loi de progression de sa variable, nous permettra naturellement de traiter les questions exactement semblables dont dépend la détermination de la limite de la région de convergence de la série de Taylor.

Nous commencerons par traiter quelques exemples qui achèveront de dissiper ce qu'il peut rester d'obscur dans les explications qui précèdent. L'étude de ces exemples conduira d'elle-même à la solution générale de la question, de sorte qu'il ne restera presque qu'à formuler cette solution.

CHAPITRE XXIII

EXEMPLES DE DÉTERMINATION DE LA LIMITE DE LA RÉGION DE CONVERGENCE DE LA SÉRIE DE TAYLOR.

295. Soit d'abord l'équation

$$y^2 = 2px;$$

$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ désignant l'abscisse du point de départ, et $x_1 = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}$ celle d'un point de la région de convergence, α_1 et β_1 devront satisfaire à la condition

$$(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + (\beta_1 - \beta_0)^2 < \alpha_0^2 + \beta_0^2,$$

ou

$$\alpha_1^2 - 2\alpha_0\alpha_1 + \beta_1^2 - 2\beta_1\beta_0 < 0:$$

pour que le point mobile puisse passer sur la conjuguée $C = \infty$, il faudra donc que l'on puisse trouver des valeurs négatives de α, telles que $\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0$ soit négatif, c'est-à-dire qu'il faudra que α_0 soit lui-même négatif.

Supposons d'abord α_0 positif : le point mobile n'ayant pu passer sur la conjuguée $C = \infty$, la caractéristique du point final aura le signe de celle du point initial ; et comme les caractéristiques de deux points ayant même abscisse sont toujours de signes contraires, il n'y aura aucun doute sur la valeur de y, qui se sera développée suivant la série.

Supposons maintenant α_0 négatif : le point mobile ne pourra pas dans ce cas passer sur la courbe réelle, car il n'existera pas de valeurs positives de α satisfaisant à l'inégalité $\alpha^2 - 2\alpha_0\alpha < 0$; β' ne pourra donc pas changer de signe ; et si β en a changé, dans le passage de x_0 à x_1, le point $[x, y]$ aura certainement traversé la conjuguée $C = \infty$, tandis que dans le cas contraire il ne l'aura pas traversée, ou l'aura traversée un nombre pair de fois, ce qui revient au même.

La caractéristique du point final aura donc, ou non, le signe de la caractéristique du point initial, suivant que β_0 et β_1 seront de même signe ou de signes contraires.

On construirait aisément, si on le voulait, le périmètre de la région de convergence : cette courbe passerait, dans tous les cas, par le point

critique, et y toucherait la courbe réelle et la conjuguée $C = \infty$; elle n'aurait d'ailleurs que ce point commun, soit avec la courbe réelle, soit avec la conjuguée $C = \infty$, suivant que α_0 serait négatif ou positif. Dans le premier cas, les deux points d'une même conjuguée, situés sur la limite de la région de convergence, appartiendraient toujours à des branches inférieures ou supérieures, suivant que le point de départ $[x_0, y_0]$ serait lui-même sur une branche inférieure ou sur une branche supérieure ; dans le second, les points de la limite, pour lesquels β serait de même signe que β_0, appartiendraient à des branches de même nature que celle où se trouvait le point de départ ; et les autres à des branches de nature contraire. Dans ce dernier cas, la région de convergence serait repliée sur elle-même.

294. Soit maintenant l'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 :$$

ce sera le sommet de droite A, ou le sommet de gauche A′, qui limitera la région de convergence, suivant que

$$\beta_0^2 + (\alpha_0 - a)^2 \lesssim \beta_0^2 + (\alpha_0 + a)^2,$$

c'est-à-dire suivant que α_0 sera positif ou négatif.

Il est facile d'interpréter ce résultat :

La partie réelle de l'abscisse d'un point du lieu ne passe par zéro que lorsque le point lui-même passe sur la conjuguée $C = 0$, c'est-à-dire sur l'hyperbole qui touche l'ellipse en ses sommets B et B′ placés sur l'axe des y. Du reste, il est évident que la partie imaginaire de x est positive ou négative suivant que le point appartient à une branche d'hyperbole tangente à l'ellipse en un point de l'arc BAB′ ou en un point de l'arc BA′B′.

On voit donc que celui des deux points critiques qui limite la région de convergence est toujours le sommet de l'ellipse le plus proche du point où la branche de conjuguée qui contient le point de départ, touche cette ellipse.

Supposons α_0 positif : le point $[x, y]$ pourra ou non passer sur la conjuguée $C = \infty$, sans sortir de la région de convergence, suivant qu'on pourra ou non satisfaire à la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < (\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2$$

par des valeurs positives de α plus grandes que a.

Cette condition se réduit à $\alpha_0 > a$; si donc α_0 est moindre que a, le point $[x, y]$ ne pouvant, sans sortir de la région de convergence, passer sur la conjuguée $C = \infty$, la caractéristique du point final aura le signe de la caractéristique du point initial ou un signe contraire, suivant que, dans l'intervalle, le point mobile n'aura pas ou aura traversé la conjuguée $C = 0$, c'est-à-dire suivant que α_1 et α_0 seront de même signe ou

de signes contraires. Comme du reste les caractéristiques de deux points ayant même abscisse sont toujours de signes contraires, il ne restera aucun doute sur celle des valeurs de y qui se sera développée par la série de Taylor.

Si la valeur finale de x était réelle et moindre que a, les valeurs finales de y seraient aussi réelles, mais le point d'arrivée serait évidemment sur la branche d'ellipse qui contiendrait le point de contact de la branche d'hyperbole où se trouvait le point de départ.

Supposons maintenant $\alpha_0 > a$: pour que le point mobile $[x, y]$ pût passer sur la courbe réelle, il faudrait qu'on pût satisfaire à la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < (\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2$$

au moyen de valeurs de α comprises entre $-a$ et $+a$; or cette condition se réduit à

$$(\alpha - a)(\alpha + a - 2\alpha_0) < 0;$$

elle ne peut donc être satisfaite : ainsi la limite de la région de convergence touchera seulement la courbe réelle au sommet A.

Dans ce cas de $\alpha_0 < a$, la caractéristique pourra changer de signe en passant par ∞ ou par 0, car le point $[x, y]$ pourra traverser la conjuguée $C = 0$ s'il existe pour β des valeurs satisfaisant à la condition

$$\alpha_0^2 + (\beta - \beta_0)^2 < (\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2,$$

ou

$$\beta^2 - 2\beta\beta_0 < a^2 - 2a\alpha_0.$$

Il n'y a à cette condition aucun empêchement général ; par conséquent, suivant que $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_0\beta_0$ seront de même signe ou de signes contraires, les caractéristiques des deux points extrêmes seront aussi de même signe ou de signes contraires.

295. J'ai voulu, dans ce qui précède, pour plus de précision, déterminer le signe de la caractéristique du point d'arrivée; mais il est évident que la question ne l'exigeait pas, car deux points qui ont même abscisse, étant toujours séparés par la conjuguée $C = \infty$, il suffisait, pour choisir la valeur finale de y, de savoir si le point mobile, pendant son mouvement, avait ou non traversé cette conjuguée.

J'abrégerai dans les exemples suivants.

L'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2$$

se discutera comme la précédente ; cependant elle offrira quelques particularités nouvelles, parce que l'enveloppe des conjuguées ne sera plus réelle.

La région de convergence sera limitée au sommet de droite A, ou au sommet de gauche A′ de l'enveloppe, selon que

$$\alpha_0^2 + (\beta_0 - a)^2 \lesssim \alpha_0^2 + (\beta_0 + a)^2,$$

ou que β_0 sera positif ou négatif.

Or la partie imaginaire de l'abscisse d'un point du lieu ne passe par zéro que lorsque le point lui-même passe sur la conjuguée $C = \infty$ qui touche l'enveloppe en ses sommets placés sur l'axe des y : on conclut de là, comme dans le cas précédent, que celui des points critiques qui limite la région de convergence est toujours le sommet de l'enveloppe le plus proche du point où la branche qui contient le point de départ, touche cette enveloppe.

Supposons β_0 positif : le point $[x, y]$ pourra ou non passer sur la conjuguée $C = 0$, suivant qu'on pourra ou non trouver pour β des valeurs positives et plus grandes que a, qui satisfassent à la condition

$$\alpha_0^2 + (\beta - \beta_0)^2 < \alpha_0^2 + (\beta_0 - a)^2.$$

Cette condition se réduit à

$$(\beta - a)(\beta + a - 2\beta_0) < 0;$$

le point mobile pourra donc ou non passer sur la conjuguée $C = 0$, suivant que β_0 sera plus grand ou plus petit que a.

Au reste, on verrait, comme précédemment, que lorsque le point $[x, y]$ peut passer sur la conjuguée $C = 0$, il ne peut parvenir à l'enveloppe et réciproquement, puisque la condition est la même dans les deux cas,

$$(\beta - a)(\beta + a - 2\beta_0) < 0,$$

mais avec les hypothèses contraires $\beta < a$ et $\beta > a$. D'un autre côté, le point $[x, y]$ pourra ou non passer sur la conjuguée $C = \infty$, suivant qu'on pourra ou non trouver pour α des valeurs satisfaisant à la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < \alpha_0^2 + (\beta_0 - a)^2,$$

ou

$$\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0 < a^2 - 2a\beta_0.$$

Cela posé : si β_0 est plus grand que a, le point $[x, y]$ pourra passer sur la conjuguée $C = 0$, et il y aura ou non passé, suivant que α_1 et α_0 seront de signes contraires ou de même signe ; de même, il aura ou non traversé la conjuguée $C = \infty$, suivant que β_0 et β_1 seront de signes contraires ou de même signe ; la caractéristique du point final sera donc de même signe que celle du point initial, ou aura un signe contraire, suivant que $\alpha_1 \alpha_0 \beta_1 \beta_0$ sera positif ou négatif.

Si, au contraire, β_0 est moindre que a, suivant que β_1 et β_0 seront de signes contraires ou de même signe, le point $[x, y]$ aura ou non traversé la conjuguée $C = \infty$, de sorte que les caractéristiques du point initial et du point final seront alors de signes contraires ou de même signe ; tandis que, suivant que α_1 et α_0 seront de signes contraires ou de même

signe, le point mobile ayant ou non passé sur l'enveloppe, le point final et le point initial seront, sur leurs conjuguées respectives, de côtés opposés ou du même côté par rapport aux points où ces conjuguées touchent l'enveloppe, sans qu'il en puisse d'ailleurs résulter de changement de signe dans la caractéristique : ce serait la partie imaginaire de $\frac{dy}{dx}$ qui changerait de signe avec α, de sorte qu'on eût pu proposer de reconnaître, parmi les deux valeurs finales de y, celle qui se serait développée par la série de Taylor, au signe de la partie imaginaire de la valeur qu'elle devait faire prendre à $\frac{dy}{dx}$.

296. Prenons encore l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

La région de convergence sera bornée au sommet de droite ou au sommet de gauche, suivant que

$$(\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2 \lesseqgtr (\alpha_0 + a)^2 + \beta_0^2,$$

c'est-à-dire suivant que α_0 sera positif ou négatif.

Or, quand on suit une même conjuguée en allant de droite à gauche, α est d'abord positif aux environs du point de contact de la conjuguée avec la branche droite de l'hyperbole ; il est négatif aux environs du point de contact de gauche, et il s'annule aux extrémités du diamètre conjugué de celui qui passe par les deux points de contact.

Sur quelque conjuguée que se trouve le point initial, le sommet où se trouve bornée la région de convergence est donc toujours celui qui appartient à la branche de l'hyperbole réelle qui passe par l'extrémité du quadrant (oblique) de conjuguée sur lequel se trouve le point initial.

297. S'il s'agissait de l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2,$$

les points critiques seraient les sommets de l'enveloppe imaginaire des conjuguées.

La région de convergence serait limitée au sommet de droite ou au sommet de gauche suivant que

$$(\alpha_0^2 + (\beta_0 - a)^2 \lesseqgtr \alpha_0^2 + (\beta_0 + a)^2,$$

ou que β_0 serait positif ou négatif.

Cette condition s'interpréterait comme dans le cas précédent.

On achèverait dans ces deux derniers exemples la détermination de la valeur finale de y comme dans les deux précédents.

298. L'équation

$$y^n = (a + x)^m,$$

qu'on ramène par une transformation de variables à

$$y^n = (1 + x)^m,$$

où l'on peut supposer que x parte de 0, est, je crois, la seule qu'on ait avant moi discutée au point de vue qui nous occupe.

Le point critique est $x = -1$, $y = 0$, il appartient à la conjuguée $C = \infty$: les branches de cette conjuguée sont représentées, du côté des x plus grands que -1 par les équations

$$y = \rho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{n} \right)$$

et du côté des x moindres que -1 par

$$y = \rho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \right),$$

où ρ désigne $1 + x$ ou $-(1 + x)$ et où $\rho^{\frac{m}{n}}$ n'a qu'une valeur positive.

La théorie indique que, quelle que soit la position du point de départ $[x_0, y_0]$, la région de convergence ne pourra jamais couper qu'une seule des branches de la conjuguée $C = \infty$; d'un autre côté, tous les points qui correspondront à une même abscisse seront toujours séparés les uns des autres par une au moins de ces branches ; par conséquent, si l'on savait quelle est la branche que peut couper la limite de la région de convergence, on saurait par là même dans quelle case se trouvera le point d'arrivée : il appartiendrait à la case qui contenait le point de départ, ou à la case voisine, entamée par la région de convergence, suivant que β_0 et β_1 seraient de même signe ou de signes contraires.

Or, en supposant à x_0 une valeur réelle 0, et se donnant en outre la valeur initiale de y, on se donne par là même la branche de la conjuguée $C = \infty$ qui traverse la région de convergence : la question est donc résolue d'avance, il ne reste qu'à en donner la réponse en formule.

Pour cela posons

$$1 + x = \rho \left(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi \right),$$

φ devant partir de 0 en même temps que x ; il en résultera

$$y = \rho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{2k\pi + m\varphi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi + m\varphi}{n} \right).$$

S'il ne s'agissait pas de retrouver dans cette formule la valeur de y qui se développe par la série de Maclaurin, on pourrait y donner à φ et à ρ toutes les valeurs imaginables.

Mais en premier lieu, pour que la série soit convergente, il faudra que ρ reste compris entre 0 et 2, et d'un autre côté, la discussion précédente prouve qu'en raison de cette condition la valeur de la série reproduira bien de temps à autre la valeur de

$$\rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

dans laquelle k correspondrait à y_0, mais ne se rencontrera jamais même avec les valeurs voisines algébriquement

$$\rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{(2k\pm 1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{(2k\pm 1)\pi}{n}\right):$$

cela signifie évidemment que, pour que la formule

$$\rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi+m\varphi}{n}+\sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi+m\varphi}{n}\right)$$

reproduise perpétuellement la valeur de la série, il faudra que $m\varphi$ reste toujours compris entre $+\pi$ et $-\pi$, c'est-à-dire que si $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est la valeur finale qu'on veut attribuer à x et qui devra être telle que $\alpha^2+\beta^2<1$, pour mettre d'accord les deux formules, il faudra toujours, après avoir tiré φ des équations

$$\sin\varphi=\frac{\beta}{\sqrt{(1+\alpha)^2+\beta^2}},\quad \cos\varphi=\frac{1+\alpha}{\sqrt{(1+\alpha)^2+\beta^2}},$$

réduire $m\varphi$, par l'addition ou la soustraction d'un nombre convenable de circonférences, à rentrer dans les limites

$$-\pi<m\varphi<+\pi.$$

299. L'équation

$$y=\mathrm{L}\,(1+x)$$

donne lieu à une discussion analogue : le point critique a encore pour abscisse $x=-1$, de sorte que la conjuguée qui y passe est toujours la conjuguée $\mathrm{C}=\infty$ dont les branches sont représentées, du côté des x plus grands que -1 par les équations

$$y=\mathrm{L}\,(1+x)+2k\pi\sqrt{-1},$$

et du côté des x moindres que -1 par

$$y = \mathrm{L}(-1-x) + (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Quel que soit le point de départ $[x_0, y_0]$, la région de convergence ne pourra jamais couper qu'une seule branche de la conjuguée $C = \infty$; d'un autre côté, si $x_0 = 0$ et $y_0 = 2k_0\pi\sqrt{-1}$, c'est la branche

$$y = \mathrm{L}(1+x) + 2k_0\pi\sqrt{-1}$$

qui traversera la région de convergence : on sait donc d'avance que le point $[x_1, y_1]$ dont l'ordonnée serait fournie par la série de Maclaurin, supposée convergente, sera compris entre les branches

$$y = \mathrm{L}(1+x) + 2k_0\pi\sqrt{-1}$$

d'une part, et

$$y = \mathrm{L}(1+x) + (2k_0 \pm 2)\pi\sqrt{-1}$$

de l'autre. Ce qui fournit la solution géométrique de la question.

Pour en avoir la solution algébrique, posons

$$1 + x = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

d'où

$$y = \mathrm{L}\cdot\rho + \varphi\sqrt{-1} :$$

il est clair que, pour que cette formule reste constamment d'accord avec la série, il faudra que φ lui-même reste compris entre

$$(2k_0+1)\pi \quad \text{et} \quad (2k_0-1)\pi,$$

puisque sans cela, φ, variant d'une manière continue de sa valeur initiale $2k_0\pi$ à sa valeur finale, aurait pris momentanément l'une des valeur

$$(2k_0 \pm 1)\pi,$$

qui eût amené le point $[x, y]$ sur l'une des branches

$$y = \mathrm{L}(-1-x) + (2k_0 \pm 1)\pi\sqrt{-1},$$

que la région de convergence ne peut pas atteindre.

Le même procédé de démonstration s'étendrait sans peine aux fonctions

$$y = \int dx \sqrt{\frac{1-x^2}{1-e^2x^2}},$$

$$y = \int dx \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}},$$

et en général à toutes les intégrales périodiques.

300. Dans les exemples précédents, la région de convergence de la série était toujours limitée à celui des points critiques dont l'abscisse retranchée de celle du point de départ, fournissait la différence de plus petit module : il n'en sera plus de même dans les exemples qui vont suivre et qui par suite présenteront un intérêt nouveau.

Soit d'abord l'équation

$$y^3 - a^2y + a^2x = 0,$$

que nous avons déjà étudiée dans le chapitre XXI.

Les points critiques sont (*fig.* 12 *bis*) :

$$\text{L} \begin{cases} x = \dfrac{2a}{3\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{L}' \begin{cases} x = -\dfrac{2a}{3\sqrt{3}}, \\ y = -\dfrac{a}{\sqrt{3}}; \end{cases}$$

les carrés des modules des différences des abscisses des deux points

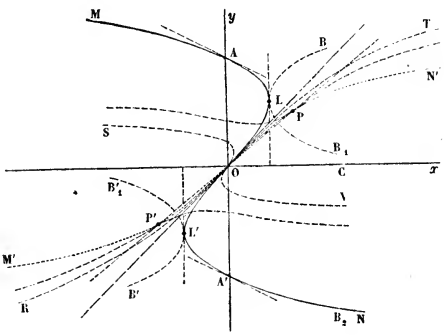


Fig. 12 *bis.*

critiques, retranchées successivement de celle d'un point quelconque du lieu, $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, sont

$$\left(\alpha - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta^2 \quad \text{et} \quad \left(\alpha + \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta^2$$

dont l'égalité n'exige que l'annulation de α.

Il semblerait donc que la région de convergence de la série dût passer à la fois aux deux points critiques dès que l'abscisse du point de départ

serait dépourvue de partie réelle ; et que, par les mêmes motifs, la région de convergence fût limitée au point L si α_0 était positif et au point L′ dans le cas contraire.

Mais ces conclusions sont le plus souvent démenties par les faits, car, pour aller du point de départ à celui des deux points critiques le plus proche, c'est-à-dire dont l'abscisse retranchée de celle du point de départ donne la différence de moindre module, il faut quelquefois ou passer d'abord par l'autre point critique, ou aller prendre passage, plus loin encore, sur la branche de conjuguée qui contient cet autre point critique.

C'est qu'en effet la formule que l'on possède de la condition de convergence, ne contenant que les parties réelles et imaginaires de la variable indépendante, à ses deux limites, tandis qu'elle devrait au moins contenir les parties qui composent la valeur initiale de la fonction, il serait imprudent de s'abandonner complétement aux indications qu'elle peut fournir ; il faut l'appliquer seulement de proche en proche, avec précaution, et encore doit-on rejeter les conclusions où elle mènerait lorsque ces conclusions sont en contradiction évidente avec les faits.

Dans l'exemple qui nous occupe, α peut s'annuler dans des circonstances toutes différentes et où les conclusions à tirer ne sont en rien semblables.

α s'annule d'abord lorsque le point $[x, y]$ passe sur l'enveloppe imaginaire : dans ce cas on conçoit aisément que la région de convergence s'étende également jusqu'aux deux points critiques ; car, en vertu de l'inégalité

$$\beta_0^2 < \frac{4a^2}{27} + \beta_0^2,$$

elle comprendra nécessairement l'origine : or si le point $[x, y]$ peut se rendre du point de départ $[\beta_0, \beta'_0]$ à l'origine, il aura ensuite le même chemin à faire pour aller soit à l'un, soit à l'autre des deux points critiques.

Mais chacune des conjuguées dont la caractéristique surpasse $-\frac{1}{2}$ contient aussi deux points dont les abscisses manquent de partie réelle. Ces conjuguées touchent la courbe réelle sur les arcs AM et A′N ; or il sera facile d'établir, ce qui d'ailleurs est pour ainsi dire évident, que si le point de départ appartient, par exemple, à une branche tangente à la courbe réelle en un point de l'arc AM, soit que la partie réelle de l'abscisse de ce point de départ soit d'ailleurs positive, nulle, ou négative, ce sera toujours le point L qui limitera la région de convergence, tandis que le point L′ en sera séparé par un intervalle plus ou moins considérable.

Nous remarquerons encore, avant d'entrer dans les détails, que si le point de départ appartient à une conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire, la partie imaginaire de son abscisse sera positive ou négative

selon que le point de contact, avec l'enveloppe, de la demi-conjuguée où se trouvera ce point de départ, appartiendra à la branche ON' ou à la branche OM' ; et que si ce contact a lieu, par exemple, sur ON', la partie réelle de l'abscisse du point de départ sera positive ou négative, selon que la branche qui contiendra le point de départ s'éloignera du point de contact vers la droite ou vers la gauche.

Cela posé, prenons d'abord pour point de départ un point d'une demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc LM : pour parvenir au point L', il faudrait que le point $[x, y]$ passât d'abord sur la demi-conjuguée qui touche la courbe réelle en L : mais si l'on compare les carrés des modules des différences des abscisses du point L et d'un point de la conjuguée qui y passe, retranchées successivement de l'abscisse du point de départ, on voit que de ces deux carrés

$$\left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2,$$

$$\left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}} - h\right)^2 + \beta_0^2,$$

le premier est inférieur au second, dès que α_0 n'atteint pas $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, puisque h est supposé positif.

Ainsi, il ne serait pas même nécessaire que α_0 fût négatif ; il suffirait qu'il fût moindre que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ pour que le point $[x, y]$, bien loin de pouvoir atteindre au point L', ne pût même pas passer sur la conjuguée qui touche la courbe réelle au point critique L.

Tant donc que la demi-conjuguée passant par le point de départ touchera la courbe réelle en un point de l'arc LM, la région de convergence sera limitée au point L : si α_0 est moindre que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, le point $[x, y]$ ne pourra pas passer sur la conjuguée qui touche la courbe réelle en L, tandis que si α_0 surpasse $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, le point $[x, y]$ au contraire ne pourra pas passer sur la courbe réelle.

Dans le premier cas, le point d'arrivée appartiendra encore à une demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc LM ; et les deux points de départ et d'arrivée seront, sur leurs conjuguées respectives, placés, par rapport aux points de contact de ces conjuguées avec la courbe réelle, du même côté, ou de côtés opposés, suivant que $\beta_1\beta_0$ sera positif ou négatif, parce que si β a passé par zéro dans l'intervalle, à ce moment le point $[x, y]$ aura changé de branche sur la conjuguée qui le contenait.

Dans le second cas, où α_0 surpasserait $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, le point $[x, y]$ ne pourra

pas atteindre la courbe réelle, mais il pourra traverser la demi-conjuguée qui passe au point L, sur sa branche supérieure ou sa branche inférieure, suivant que β_0 sera positif ou négatif; et il l'aura traversée en effet si $\beta_1\beta_0$ est négatif, tandis que si au contraire $\beta_1\beta_0$ est positif, le point de contact, avec la courbe réelle de la branche de conjuguée à laquelle appartiendra le point d'arrivée, sera resté sur l'arc ML.

Lorsque le point $[x, y]$ aura traversé la conjuguée $C = \infty$, le point de contact avec la courbe réelle de la branche de conjuguée à laquelle appartiendra le point d'arrivée, sera sur l'arc LO, ou bien cette branche de conjuguée ne touchera plus la courbe réelle.

Dans cette dernière hypothèse, le point $[x, y]$ aurait traversé la conjuguée $C = 1$, en un point de la branche TOV, sur l'arc OT, si β_0 était positif, et sur OV dans le cas contraire.

La conjuguée $C = 1$ est fournie par les équations

$$\alpha'^3 - 3\alpha'\beta'^2 - a^2\alpha' + a^2\alpha = 0 \quad \text{et} \quad 3\alpha'^2 = \beta'^2,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \pm\left(\frac{8\beta^3}{3a^2\sqrt{3}} + \frac{\beta}{\sqrt{3}}\right),$$

le signe + convenant à l'arc ROT et le signe — à SOV, car sur OT, α et β sont positifs, sur OV, α est positif et β négatif, sur OS, α est négatif et β positif, enfin sur OR, α et β sont négatifs.

Comme aucune des conjuguées circonscrites à l'enveloppe imaginaire, excepté la conjuguée $C = 1$, ne coupe l'axe des x, car les équations

$$\begin{aligned} \alpha'^3 - 3\alpha'\beta'^2C^2 - \alpha^2\alpha' + a^2\alpha &= 0, \\ 3\alpha'^2\beta C - \beta^3C^3 - a^2\beta C + a^2\beta &= 0, \\ \alpha' + \beta C &= 0, \end{aligned}$$

donnent

$$\beta = \pm a\sqrt{\frac{C-1}{2C^3}};$$

il en résulte que les deux arcs OS et OT sont les limites respectives des branches de gauche et de droite d'une conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire en un point situé sur ON', à une distance infiniment petite du point O; et que de même OV et OR sont les limites des branches de droite et de gauche d'une conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire en un point situé sur OM' à une distance infiniment petite du point O.

On conclut de là et de ce que, dans l'hypothèse où nous raisonnons, $\alpha_0 > \frac{2a}{3\sqrt{3}}$, le point $[x, y]$ ne pouvant passer sur la courbe réelle, ne peut non plus changer de branche sur la conjuguée où il se trouve : que si le point de départ appartient à une branche supérieure, le point

mobile ne pourra traverser la conjuguée C = 1 qu'en un point de OT, ce qui sera arrivé lorsqu'on aura

$$\left(\alpha_0 - \frac{8\beta_0^3}{3a^2\sqrt{3}} - \frac{\beta_0}{\sqrt{3}}\right)\left(\alpha_1 - \frac{8\beta_1^3}{3a^2\sqrt{3}} - \frac{\beta_1}{\sqrt{3}}\right) < 0,$$

auquel cas le point d'arrivée appartiendra à une conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire en un point de ON'; et qu'au contraire, si le point de départ appartient à une branche inférieure, le point $[x, y]$ ne pourra traverser la conjuguée C = 1 qu'en un point de OV, ce qui sera arrivé lorsqu'on aura

$$\left(\alpha_0 + \frac{8\beta_0^3}{3a^2\sqrt{3}} + \frac{\beta_0}{\sqrt{3}}\right)\left(\alpha_1 + \frac{8\beta_1^3}{3a^2\sqrt{3}} + \frac{\beta_1}{\sqrt{3}}\right) < 0,$$

auquel cas le point d'arrivée appartiendra à une branche de conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire en un point de OM'.

Au reste la condition de convergence

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 < \left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2$$

se réduisant à

$$\alpha_0^2 + (\beta - \beta_0)^2 < \left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2,$$

pour un point de l'enveloppe imaginaire, cette inégalité ne pourra pas être satisfaite dans le cas où nous sommes, puisque, α_0 étant plus grand que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, α_0^2 sera déjà plus grand que $\left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)$ et que d'un autre côté le point $[x, y]$ ayant traversé la conjuguée C = ∞, β et β_0 seraient de signes contraires, ce qui rendrait $(\beta - \beta_0)^2$ plus grand aussi que β_0^2.

Ainsi tant que le point de départ appartiendra à une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de ML, le point $[x, y]$ ne pourra pas atteindre l'enveloppe imaginaire des conjuguées.

Supposons maintenant que le point de départ appartienne à une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc LO.

La condition de convergence

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 < \left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2$$

se réduisant à

$$\left(\alpha - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)\left(\alpha + \frac{2a}{3\sqrt{3}} - 2\alpha_0\right) < 0$$

lorsqu'on y fait $\beta = 0$, on voit que le point $[x, y]$ pourra passer sur la

conjuguée $C = \infty$, qui a son contact en L, sans pouvoir atteindre la courbe réelle, ou inversement, suivant que α_0 sera plus grand ou plus petit que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$.

Dans le cas où α_0 serait plus grand que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, le point $[x, y]$ aurait retraversé la conjuguée $C = \infty$ si $\beta_1\beta_0$ avait le signe $-$; mais ce cas n'offre plus aucun intérêt.

Que α_0 soit plus grand ou plus petit que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$, le point $[x, y]$ pourra occasionnellement traverser la conjuguée $C = 1$, et il l'aura traversée en effet si

$$\left[\alpha_0^2 - \left(\frac{8\beta_0^3}{3a_2\sqrt{3}} + \frac{\beta_0}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\left[\alpha_1^2 - \left(\frac{8\beta_1^3}{3a^2\sqrt{3}} + \frac{\beta_1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$$

est négatif.

Il pourra même atteindre l'enveloppe imaginaire des conjuguées si la distance

$$\sqrt{\left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2}$$

est assez considérable.

Car β et β_0 devant être maintenant de même signe, l'inégalité

$$\alpha_0^2 + (\beta - \beta_0)^2 < \left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2$$

ou

$$\beta^2 - 2\beta\beta_0 + \frac{4a\alpha_0}{3\sqrt{3}} - \frac{4a^2}{27} < 0$$

ne présenterait d'impossibilité qu'autant que

$$\beta_0^2 + \frac{4a\alpha_0}{3\sqrt{3}} + \frac{4a^2}{27}$$

serait négatif ; c'est-à-dire que

$$\beta_0^2 + \left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 < \alpha_0^2.$$

de sorte que

$$\beta_0^2 + \left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 - \alpha_0^2 = 0$$

serait l'équation du lieu qui séparerait les points pour lesquels la région de convergence n'atteindrait pas l'enveloppe imaginaire, de ceux au contraire d'où la série pourrait rayonner au delà de cette enveloppe.

Au reste l'enveloppe imaginaire des conjuguées étant caractérisée par la condition $\alpha = 0$, le signe de $\alpha_0\alpha_1$ indiquera toujours si le point $[x, y]$ a ou non passé sur cette enveloppe.

Supposons donc $\alpha_0 < \frac{2a}{3\sqrt{3}}$, pour que le point $[x, y]$ puisse passer sur la courbe réelle.

Ce cas se subdivisera en deux autres suivant que α_0 sera plus grand ou plus petit que $\frac{a}{3\sqrt{3}}$. Dans la première hypothèse, en effet, le chemin du point $[x, y]$ ne pourra rencontrer la courbe réelle qu'en un point de l'arc OL, tandis que dans le cas contraire il pourrait la rencontrer sur l'arc OL'.

En effet, la condition de convergence, pour un point de la courbe réelle, se réduisant à

$$(\alpha - \alpha_0 + \beta_0^2 < \left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right) + \beta_0^2$$

ou

$$\left(\alpha - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)\left(\alpha + \frac{2a}{3\sqrt{3}} - 2\alpha_0\right) < 0,$$

elle ne pourra être satisfaite par une valeur négative de α qu'autant que α_0 sera moindre que $\frac{a}{3\sqrt{3}}$.

Supposons d'abord $\alpha_0 > \frac{a}{3\sqrt{3}}$. Dans ce cas, si le point $[x, y]$ passe sur la courbe réelle, ce qu'on reconnaîtra au caractère $\beta_0\beta_1 < 0$, il reviendra sur des conjuguées tangentes à la branche OL, si

$$\left[\alpha_0^2 - \left(\frac{8\beta_0^3}{3a^2\sqrt{3}} + \frac{\beta_0}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\left[\alpha_1^2 - \left(\frac{8\beta_1^3}{3a^2\sqrt{3}} + \frac{\beta_1}{\sqrt{3}}\right)^2\right] > 0 :$$

dans le cas contraire, il aura traversé la conjuguée $C = 1$ et se sera transporté sur une conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire.

Si au contraire α_0 est moindre que $\frac{a}{3\sqrt{3}}$, le point $[x, y]$, avant d'arriver à la branche OL', aura dû passer sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées, pour que α ait pu changer de signe. De sorte que si $\alpha_1\alpha_0$ avait le signe $+$, le point $[x, y]$ n'aurait pas passé sur la branche OL'.

On pourrait maintenant placer le point de départ sur une conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire en un point de l'arc ON'.

Mais il serait inutile de reprendre en détail l'analyse des faits dans cette hypothèse : nous venons de passer des conjuguées d'une catégorie à celles de l'autre, on effectuerait aussi aisément le passage inverse.

301. Nous étudierons en dernier lieu l'équation

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

dont l'exemple, par les difficultés qu'il semblerait devoir présenter, fournira un contrôle suffisant de la méthode.

L'origine est un point double où les deux tangentes sont distinctes ; mais comme l'une d'elles se confond avec l'axe des y, ce point pourra dans certains cas borner la région de convergence.

La dérivée de y, par rapport à x, redevient infinie aux points

$$\begin{cases} x = a\sqrt[3]{4}, \\ y = a\sqrt[3]{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a\sqrt[3]{4}\,\dfrac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}, \\ y = a\sqrt[3]{2}\,\dfrac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a\sqrt[3]{4}\,\dfrac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}, \\ y = a\sqrt[3]{2}\,\dfrac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}, \end{cases}$$

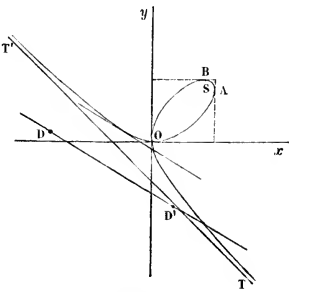


Fig. 13.

ces trois points A, D, D' (*fig.* 13) sont encore des points critiques.

Toutes les conjuguées touchent la courbe réelle ; leur enveloppe imaginaire ne jouera dans la discussion qu'un rôle très-secondaire.

La courbe a pour asymptotes les droites

$$y = -x - a,$$

$$y = \frac{1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\,x + \frac{2a}{1-\sqrt{3}\sqrt{-1}},$$

$$y = \frac{1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\,x + \frac{2a}{1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}.$$

La caractéristique commune des points critiques imaginaires est $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, la droite qui les joint est représentée par l'équation

$$y = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}x - a\sqrt[3]{2}.$$

Ces points sont figurés en D et D'.

Supposons d'abord le point de départ situé sur une branche de conjuguée tangente à l'arc OT de la courbe réelle ; la région de convergence sera alors limitée au point O : en effet, si α_0 est positif, le point $[x, y]$ ne pourra même pas atteindre la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle à l'origine, car l'inégalité

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < \alpha_0^2 + \beta_0^2,$$

ne pouvant être satisfaite par aucune valeur négative de α, si le point $[x, y]$ pouvait se rendre sur la portion de la conjuguée $C = \infty$, dont nous parlons, il pourrait à plus forte raison passer à l'origine en suivant un chemin tangent à l'axe des y, ce qui n'est possible en aucun cas.

D'un autre côté, si α_0 est négatif, l'inégalité

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 < \left(\alpha_0 - a\sqrt[3]{4}\right)^2 + \beta_0^2$$

suffit pour montrer que le point A sera certainement en dehors de la région de convergence, que par conséquent le point $[x, y]$ ne pourra atteindre la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle en A, et que, à plus forte raison, il restera bien éloigné de la branche de la conjuguée $C = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ qui contient les points critiques imaginaires et qui touche la courbe réelle en un point de OT'.

Cela posé, si α_0 est positif, le point $[x, y]$ pourra passer sur la courbe réelle et il y aura passé en effet, si $\beta_1\beta_0$ est négatif; mais la caractéristique du point final sera restée en tout cas négative et moindre que -1.

Au contraire, si α_0 est négatif, le point $[x, y]$ pourra passer sur la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle à l'origine ; il y aura passé en effet si $\beta_1\beta_0$ est négatif ; et dans ce cas la caractéristique du point d'arrivée sera devenue positive; tandis que, si $\beta_1\beta_0$ est positif, cette caractéristique sera restée négative et moindre que -1.

Plaçons maintenant le point de départ sur une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OBSA.

La région de convergence restera limitée à l'origine tant que $\alpha_0^2 + \beta_0^2$ sera moindre que $\left(\alpha_0 - a\sqrt[3]{4}\right)^2 + \beta_0^2$, c'est-à-dire tant que α_0 ne surpassera pas $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$, ce qui ne saurait évidemment arriver sur une conju-

guée très-voisine de celle qui passe par l'origine avec une caractéristique infinie.

Ainsi le point de départ marchant toujours dans le même sens, la région de convergence restera d'abord, et pendant un certain temps, limitée à l'origine.

On pourrait évidemment préciser davantage si on le voulait.

Le point de départ étant choisi de manière que la région de convergence reste limitée à l'origine : si α_0 est négatif, le point $[x, y]$ pourra passer sur la branche de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle à l'origine, mais il ne pourra atteindre la courbe réelle ; dans le cas contraire il pourra passer sur la courbe réelle, mais non sur la conjuguée $C = \infty$.

D'un autre côté la conjuguée $C = 0$, qui touche la courbe réelle au point B, étant définie par les équations

$$y^3 - 3a\alpha y + \alpha^3 - 3\alpha\beta^2 = 0, \quad -3ay + 3\alpha^2 - \beta^2 = 0,$$

d'où l'on tire par l'élimination de y

$$\left(\frac{3\alpha^2 - \beta^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

suivant que

$$\left[\left(\frac{3\alpha_0^2 - \beta_0^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)\right]\left[\left(\frac{3\alpha_1^2 - \beta_1^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right]$$

sera positif ou négatif, le point $[x, y]$ n'aura pas, ou aura passé sur cette conjuguée $C = 0$.

Cela posé, on peut distinguer les deux cas où le point de départ se trouverait entre les deux portions des conjuguées $C = \infty$, $C = 0$, qui nous occupent, ou au delà de la conjuguée $C = 0$.

Dans le premier cas, et si d'ailleurs α_0 est négatif, suivant que $\beta_1\beta_0$ aura le signe — ou le signe +, le point d'arrivée appartiendra à une portion de conjuguée tangente à la courbe réelle, en un point de l'arc ASBOT, situé au-dessous ou au-dessus de l'origine. Si donc $\beta_1\beta_0$ a le signe —, le point $[x, y]$ n'aura pas passé sur la conjuguée $C = 0$, ou y aura passé un nombre pair de fois, ce qui revient au même, et la caractéristique du point d'arrivée sera négative ; mais si $\beta_1\beta_0$ a le signe +, le point $[x, y]$ n'aura pas traversé la conjuguée $C = \infty$, ou l'aura traversée un nombre pair de fois, ce qui revient au même, et la caractéristique du point d'arrivée sera positive ou négative suivant que

$$\left[\left(\frac{3\alpha_0^2 - \beta_0^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)\right]\left[\left(\frac{3\alpha_1^2 - \beta_1^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right]$$

sera positif ou négatif.

Si au contraire α_0 était positif, le point $[x, y]$ ne pouvant plus passer sur la conjuguée $C = \infty$, la caractéristique du point d'arrivée serait positive ou négative suivant que

$$\left[\left(\frac{3\alpha_0^2 - \beta_0^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)\right]\left[\left(\frac{3\alpha_1^2 - \beta_1^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right]$$

serait positif ou négatif; et comme d'ailleurs le point (x, y) aura ou non passé sur la courbe réelle, suivant que $\beta_1\beta_0$ aura le signe — ou le signe + : si $\beta_1\beta_0$ est négatif, le point d'arrivée sera sur une branche de conjuguée dirigée à droite ou à gauche, si le point de départ appartenait à une branche dirigée à gauche ou à droite, et inversement, si $\beta_1\beta_0$ a le signe +.

Dans le second cas, où le point de départ se trouverait au delà de la conjuguée $C = 0$, si α_0 est négatif, la caractéristique du point d'arrivée sera négative ou positive suivant que

$$\beta_1\beta_0\left[\left(\frac{3\alpha_0^2 - \beta_0^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)\right]\left[\left(\frac{3\alpha_1^2 - \beta_1^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right]$$

sera positif ou négatif, car il n'aura traversé ni la conjuguée $C = 0$, ni à plus forte raison la conjuguée $C = \infty$, si

$$\left[\left(\frac{3\alpha_0^2 - \beta_0^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)\right]\left[\left(\frac{3\alpha_1^2 - \beta_1^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right]$$

a le signe +; il aura seulement traversé la conjuguée $C = 0$, si

$$\left[\left(\frac{3\alpha_0^2 - \beta_0^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)\right]\left[\left(\frac{3\alpha_1^2 - \beta_1^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right]$$

a le signe —, $\beta_1\beta_0$ ayant au contraire le signe +; enfin il aura traversé les deux conjuguées si les deux produits ont chacun le signe —.

Si α_0 est au contraire positif, le point $[x, y]$ ne pouvant passer sur la conjuguée $C = \infty$, la caractéristique du point d'arrivée sera négative ou positive suivant que

$$\left[\left(\frac{3\alpha_0^2 - \beta_0^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)\right]\left[\left(\frac{3\alpha_1^2 + \beta_1^2}{3a}\right)^3 - 2\alpha_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right]$$

sera positif ou négatif : d'ailleurs si $\beta_1\beta_0$ est négatif, le point d'arrivée appartiendra à une branche dirigée vers la droite ou vers la gauche, si le point de départ se trouvait sur une branche dirigée à gauche ou à droite, et inversement si $\beta_1\beta_0$ a le signe +.

Supposons maintenant le point de départ placé toujours sur une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OBSA, mais avec la circonstance $\alpha_0 > \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

Le point $[x, y]$ ne pourra passer sur la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle en A que si l'on peut satisfaire à l'inégalité

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < \left(\alpha_0 - a\sqrt[3]{4}\right)^2 + \beta_0^2$$

par des valeurs de α dépassant $+ a\sqrt[3]{4}$: or cette inégalité se réduit à

$$\alpha^2 - 2\alpha_0\alpha + 2a\alpha_0\sqrt[3]{4} - 2a^2\sqrt[3]{2} < 0,$$

et exige que α reste compris entre

$$2\alpha_0 - a\sqrt[3]{4} \quad \text{et} \quad a\sqrt[3]{4} :$$

comme nous supposons $\alpha_0 > \dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$, $2\alpha_0 - a\sqrt[3]{4}$ sera positif. Mais il reste cependant à distinguer deux cas :

$$2\alpha_0 - a\sqrt[3]{4} < a\sqrt[3]{4} \quad \text{et} \quad 2\alpha_0 - a\sqrt[3]{4} > a\sqrt[3]{4},$$

c'est-à-dire

$$\alpha_0 < a\sqrt[3]{4} \quad \text{et} \quad \alpha_0 > a\sqrt[3]{4};$$

dans le premier en effet, pour satisfaire à l'inégalité

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < \left(\alpha_0 - a\sqrt[3]{4}\right)^2 + \beta_0^2,$$

il faudrait que α restât moindre que $a\sqrt[3]{4}$, ce qui veut dire que le point $[x, y]$ ne pourrait pas atteindre la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle en A ; tandis que, dans le second cas, pour satisfaire à la même inégalité, il faudrait que α restât plus grand que $a\sqrt[3]{4}$, ce qui signifie que le point $[x, y]$ ne pourrait plus revenir sur la courbe réelle.

Supposons $\alpha_0 < a\sqrt[3]{4}$, le point $[x, y]$ ne pouvant dans ce cas passer sur la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle en A, ne pourra, à plus forte raison, atteindre la conjuguée $C = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$; par conséquent, la région de convergence sera bien limitée au point A.

Quelque part qu'on plaçât le point de départ, on saurait, dans cette hypothèse, comme précédemment, quel serait le signe de la caractéristique du point d'arrivée, et sur quelle branche ce point se trouverait.

Je passe donc au cas où α_0 dépasserait $a\sqrt[3]{4}$. Le point $[x, y]$ pouvant alors traverser la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle au point A, on ne voit pas tout d'abord pourquoi il ne pourrait pas atteindre la portion de la conjuguée $C = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ qui con-

tient les points critiques imaginaires ; c'est-à-dire qu'on ne voit pas tout d'abord auquel des trois points A, D, D' la région de convergence de la série sera limitée. A la vérité, ce serait incontestablement au point A, si

$$(\alpha_0 - a\sqrt[3]{4})^2 + \beta_0^2$$

se trouvait à la fois moindre que

$$\left(\alpha_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 + \left(\beta_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}\sqrt[2]{3}}{2}\right)^2,$$

et que

$$\left(\alpha_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 + \left(\beta_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}\sqrt[2]{3}}{2}\right)^2,$$

inégalités qui se réduisent à

$$\alpha_0\sqrt{3} + \beta_0 > 0 \quad \text{et} \quad \alpha_0\sqrt[3]{3} - \beta_0 > 0;$$

mais elles ne seraient satisfaites ni l'une ni l'autre, que la région de convergence n'en serait pas moins encore bornée au point A, laissant à l'écart les points D et D' à des distances plus ou moins considérables.

En effet, imaginons que nous revenions à l'un des points qui, ayant son abscisse définie par les équations

$$\alpha_0 = a\sqrt[3]{4}, \quad a\sqrt[3]{4}\sqrt{3} \pm \beta_0 = 0,$$

appartiendrait d'ailleurs à une portion de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OBSA.

Il est acquis que si nous diminuions infiniment peu α_0, sans faire varier β_0, la région de convergence n'atteindrait même plus alors la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui passe en A ; comment pourrait-on donc concevoir que si, au contraire, on augmentait infiniment peu α_0, la région de convergence prît instantanément un développement qui en portât la limite au delà de l'un des points D ou D' ?

Au reste, les deux conditions

$$\alpha_0\sqrt{3} \pm \beta_0 > 0$$

sont pleinement remplies lorsque le point de départ appartient à la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle en A; comment pourrait-on donc concevoir que la région de convergence limitée précédemment en A, lorsque α_0 était compris entre $\frac{a}{\sqrt{2}}$ et $a\sqrt[3]{4}$, le point de départ appartenant alors à une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OBSA, et restant encore limitée au

même point lorsque le point de départ vient se placer sur la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui touche la courbe réelle en A, eût pu dans l'intervalle s'étendre jusqu'à l'un des deux points D ou D' qu'elle aurait au contraire dû toujours tendre à absorber en enveloppant une portion de plus en plus grande de l'espace répandu autour d'eux?

Les choses ne se passent jamais d'une façon à ce point extraordinaire; et quant au fait même qui nous occupe, il trouvera une explication bien simple dans l'observation suivante : à chacune des valeurs particulières de x,

$$a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},\quad a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},$$

il correspond, pour y, les valeurs doubles

$$a\sqrt[3]{2}\,\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},\quad a\sqrt[3]{2}\,\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},$$

qui sont les ordonnées des points critiques D et D', et des valeurs simples

$$a\sqrt[3]{2}\,(1-\sqrt{3}\sqrt{-1}),\quad a\sqrt[3]{2}\,(1+\sqrt{3}\sqrt{-1}),$$

qui sont les ordonnées de points ne présentant aucune particularité remarquable. Or ce n'est évidemment qu'à l'un de ces points, et non à l'un des points D ou D', que peut se rendre le point $[x, y]$, lorsque α_0 dépassant $a\sqrt[3]{4}$, et $\alpha_0\sqrt[3]{2}\pm\beta_0$ étant négatifs, le point de départ appartient d'ailleurs à une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OBSA.

L'égalité momentanée des distances du point de départ aux points A et D ou D', quand $\alpha_0\sqrt{3}\pm\beta_0=0$, ne signifie donc en aucune façon que la limite de la région de convergence passe à la fois au point A et à l'un des points D ou D', mais bien qu'elle passe au point A et à l'un des points qui, ayant leurs abscisses égales à celles des points D et D', ne présentent toutefois aucune particularité remarquable.

La fausse indication fournie par la condition de convergence tient encore, dans ce cas, à ce que l'ordonnée du point de départ n'y entre pas : lorsque le point de départ appartiendra à une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc AOT', la même indication, dans les mêmes circonstances,

$$\alpha_0\sqrt{3}\pm\beta_0=0$$

deviendra exacte.

La même difficulté apparente, si l'on eût voulu l'apercevoir, se serait déjà présentée lorsque le point de départ appartenait à une branche de conjuguée tangente à l'arc TO : si, par exemple, on avait pris pour point

de départ le point de cet arc, qui, ayant pour abscisse $\frac{a\sqrt[3]{4}}{2}$ ou $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$, se trouverait sur une verticale menée à égale distance de l'axe des y et de la tangente au point A, les distances du point de départ à l'origine et au point A, représentées par les modules des différences des abscisses des points comparés, se seraient trouvées égales; mais il n'eût évidemment pas fallu en conclure que la limite de la région de convergence dût alors passer à la fois à l'origine et au point A : elle aurait passé par l'origine et par le point

$$x = a\sqrt[3]{4},$$
$$y = -2a\sqrt[3]{2}.$$

C'est par les mêmes motifs que chacun des points du lieu $\alpha = 0$ paraissait également éloigné des deux points critiques du lieu

$$y^3 - a^2y + a^2x = 0;$$

α_0 devenant nul sans que α'_0 le fût, la limite de la région de convergence passait à l'un des points critiques et au point simple qui avait même abscisse que l'autre.

Supposons maintenant que le point de départ marchant toujours dans le même sens se rende sur les conjuguées qui touchent l'arc AOT' de la courbe réelle.

La région de convergence restera d'abord limitée au point A, parce que sur les conjuguées dont le contact aurait lieu très-près de A, on ne pourra pas trouver de points remplissant l'une ou l'autre des conditions

$$\alpha_0 \pm \beta_0 < 0.$$

Tant que le point A restera sur la limite de la région de convergence, il ne pourra arriver au point $[x, y]$ que de passer sur la courbe réelle, sur la portion de la conjuguée $C = \infty$ qui passe au point A ou sur la portion de la coujuguée $C = 0$ qui passe à l'origine. On constatera ces diverses circonstances comme dans le cas précédent, et l'on pourra par conséquent assigner par les mêmes moyens la valeur finale de y; nous n'insisterons donc pas sur ce cas.

Supposons enfin que le point de départ appartienne à une conjuguée assez éloignée du point A pour qu'on y puisse trouver des points tels, que

$$\alpha_0 \pm \beta_0 \text{ soit négatif,}$$

de façon que la région de convergence soit alors limitée à l'un des points D ou D'.

Les distances du point de départ à ces deux points, estimées par les modules des différences des abscisses, étant

$$\sqrt{\left(\alpha_0+\frac{a\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2+\left(\beta_0+\frac{a\sqrt[3]{4}\sqrt[2]{3}}{2}\right)^2}$$

et

$$\sqrt{\left(\alpha_0+\frac{a\sqrt{4}}{2}\right)^2+\left(\beta_0-\frac{a\sqrt[3]{4}\sqrt[2]{3}}{2}\right)^2},$$

on voit que la région de convergence sera limitée au point D ou au point D′ suivant que β_0 sera négatif ou positif, c'est-à-dire suivant que le point de départ appartiendra à l'une ou à l'autre des deux branches de la conjuguée où il se trouve, qui partent de la courbe réelle. Si le point de départ appartenait à la courbe réelle (il faudrait alors qu'il fût à la gauche de l'origine pour que $\alpha_0 \pm \beta_0$ fût négatif), la limite de la région de convergence passerait à la fois aux deux points D et D′.

Dans le cas qui nous occupe, deux des valeurs de y correspondant à la valeur finale de x pourraient ne se distinguer l'une de l'autre que par le signe des parties imaginaires des valeurs qu'elles fourniraient pour

$$\frac{dy}{dx};$$

mais on saura toujours quel signe aura dû prendre la partie imaginaire de $\frac{dy}{dx}$ au point d'arrivée, si l'on a relevé les passages du point $[x, y]$ sur l'enveloppe imaginaire.

Cette enveloppe est définie par la condition

$$\frac{ay-x^2}{y^2-ax}=\text{réel},$$

ou

$$\frac{a\alpha'-\alpha^2+\beta^2}{\alpha'^2-\beta'^2-a\alpha}=\frac{a\beta'-2\alpha\beta}{2\alpha'\beta'-a\beta},$$

d'où l'on pourrait éliminer α' et β', ce qui fournirait entre α et β une équation $\varphi(\alpha, \beta)=0$. Le point $[x, y]$ aurait ou n'aurait pas passé sur l'enveloppe, suivant que

$$\varphi(\alpha_0, \beta_0), \varphi(\alpha_1, \beta_1)$$

auraient le signe — ou le signe +. Le calcul de l'équation $\varphi(\alpha, \beta)=0$ ne présentant aucune difficulté théorique, nous ne nous y arrêtons pas.

CHAPITRE XXIV

DÉTERMINATION DU POINT CRITIQUE OU EST LIMITÉE LA CONVERGENCE DE LA SÉRIE DE TAYLOR.

302. Nous avons établi, dans le chapitre XXII, que les points où peut être limitée la région de convergence de la série suivant laquelle se développe, d'après la formule de Taylor, une fonction y, explicite ou implicite, sont exclusivement ceux où la fonction ou ses dérivées, à partir d'un certain ordre, deviennent infinies, à l'exclusion, par conséquent, des points multiples qui ne remplissent pas cette condition. Nous avons établi en même temps l'inexactitude de la règle donnée par Cauchy et adoptée depuis, explicitement ou implicitement, par tous les géomètres qui ont écrit sur la matière, d'après laquelle la région de convergence serait nécessairement limitée au point critique dont l'abscisse retranchée de celle du point origine donnerait la différence de moindre module. L'erreur, sous ce dernier rapport, tenait à une confusion facile à apercevoir : il ne suffit pas, pour que la convergence de la série de Taylor soit limitée à une certaine valeur de x, que cette valeur soit critique, ou plutôt qu'il y corresponde une valeur critique de y; il faut surtout que y, variant d'une manière continue avec x à partir de sa valeur initiale, arrive à sa valeur critique en même temps que x, sans que x ait dépassé la limite en question.

Nous avons ensuite, dans le chapitre XXIII, assigné la vraie limite de la région de convergence, pour quelques fonctions particulières. Nous nous proposons dans celui-ci de traiter la question d'une manière générale.

La simplicité de la solution qui interviendra s'explique par deux motifs qu'on a déjà pu apprécier : le premier, que la considération des conjuguées fournit une méthode simple de classification des solutions imaginaires d'une équation à deux variables; le second, que nous avons préalablement résolu le problème de déterminer la marche continue du point $[x, y]$, tandis que $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ suivrait un chemin quelconque $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

La construction préalable des conjuguées avait, dans la question qui va nous occuper, une importance comparable à celle qu'aurait la description topographique d'un pays où l'on voudrait établir une route; et d'un autre côté, pour savoir si y est parvenu à sa valeur critique,

quand x est arrivé à celle qui la donne, il fallait pouvoir suivre la marche du point $[x, y]$ à partir de son point de départ.

Nous ramènerons la question de la détermination du point critique où est véritablement limitée la région de convergence à celle de la détermination du point d'arrivée d'un point $[x, y]$ mobile d'une manière continue, pendant que son abscisse $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ varierait suivant une certaine loi, toujours très-simple du reste; mais nous ne traiterons pas ici la seconde question, qui a été résolue dans les chapitres XX et XXI.

303. Je rappellerai d'abord les définitions de quelques termes que j'ai au reste déjà employés: j'appelle *point critique* d'un lieu $f(x, y) = 0$ un point ayant pour coordonnées une valeur de x à laquelle correspond une valeur de y infinie ou ayant ses dérivées infinies à partir d'un certain ordre, et cette valeur de y; c'est-à-dire que, parmi les points du lieu $f(x, y) = 0$, qui correspondent à une valeur critique de x, j'appelle seulement critique celui dont l'ordonnée est infinie ou a ses dérivées infinies à partir d'un certain ordre.

Je désignerai souvent sous le nom de *point origine* le point correspondant au système des valeurs de x et de y à partir desquelles on veut développer y suivant la série de Taylor.

Si $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ et $\alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$ sont les coordonnées du point origine, et que $a + b\sqrt{-1}$, $a' + b'\sqrt{-1}$ soient celles du point critique où se trouve limitée la convergence de la série de Taylor, l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \ldots$$

ne peut fournir que les ordonnées des points du lieu $f(x, y) = 0$, dont les abscisses

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

satisfont à la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 < (a - \alpha_0)^2 + (b - \beta_0)^2;$$

mais pour chaque valeur, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, de x, satisfaisant à cette condition, elle ne fournit qu'une seule des valeurs de y correspondantes.

Les points correspondant aux solutions de l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \ldots$$

forment plaque sur le tableau. Cette plaque est une partie de la portion du plan recouverte par les points correspondant aux solutions de l'équation

$$f(x, y) = 0;$$

je la désigne sous le nom de *région de convergence* relative au point $[x_0, y_0]$. C'est le segment du lieu $f(x, y) = 0$ que représente le segment bien déterminé

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \dots$$

de la fonction multiple y.

La région de convergence est comprise dans l'intérieur d'une courbe qui est le *périmètre* ou la *circonférence de la région de convergence;* cette courbe passe par un point critique $[a + b\sqrt{-1}, a' + b'\sqrt{-1}]$ et est caractérisée par l'équation

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = (a - \alpha_0)^2 + (b - \beta_0)^2.$$

On pourra désigner le point origine sous le nom de *centre de la région de convergence.*

Cela posé, nous examinerons successivement le cas où l'équation $f(x, y) = 0$ aurait tous ses coefficients réels et où tous les points critiques seraient réels; le cas où, les coefficients de l'équation restant réels, quelques points critiques seraient imaginaires; enfin le cas où les coefficients de l'équation $f(x, y) = 0$ seraient imaginaires. Nous distinguerons aussi dans chaque cas les deux hypothèses où l'abscisse du point origine serait réelle ou imaginaire.

PREMIER CAS.

L'équation a tous ses coefficients réels et tous les points critiques sont réels.

304. Dans ce cas, les points critiques sont exclusivement les points de contact des tangentes menées à la courbe réelle parallèlement à l'axe des y, le non de tangente étant pris dans son acception la plus générale.

Supposons d'abord que le point origine ait son abscisse réelle. Ses coordonnées seront

$$x_0 = \alpha_0 \quad \text{et} \quad y_0 = \alpha'_0\,\beta'_0 + \sqrt{-1},$$

β'_0 pouvant être nul, et le point lui-même sera situé sur une branche de la courbe réelle ou sur une branche de la conjuguée $C = \infty$.

Dans ce cas, le point critique où sera limitée la région de convergence ne saurait être que l'un des deux qui pourrait terminer cette branche dans un sens et dans l'autre, et ce sera celui dont l'abscisse différera le moins de celle du point origine.

En effet, soit $[a_n, a'_n]$ un des points critiques non situés sur la branche à laquelle appartient le point $[x_0, y_0]$: admettre que la région de convergence pût être limitée à ce point serait admettre que la série pût

donner l'ordonnée d'un point $x = a_n \pm h$, $y = a'_n \pm k$ de la courbe réelle, ou de la conjuguée à abscisses réelles passant en $[a_n, a'_n]$, infiniment voisin de ce point $[a_n, a'_n]$. Mais il ne peut en être ainsi ; car, si l'on faisait revenir x par valeurs réelles de $a_n \pm h$ à x_0, le point $[x, y]$ pénétrerait de plus en plus dans la région de convergence ; son ordonnée serait donc à chaque instant représentée par la série; d'un autre côté, ce point, en se déplaçant d'une manière continue, suivrait la branche de la courbe réelle, ou la branche de la conjuguée à abscisses réelles qui part de $[a_n, a'_n]$, et tomberait finalement au point de l'une ou l'autre de ces branches qui aurait pour abscisse $x = x_0$.

Si ce point n'était pas le point origine, c'est-à-dire si le point critique $[a_n, a'_n]$ n'appartenait pas à la même branche de la courbe à abscisses réelles que le point origine, la série donnerait donc en même temps deux valeurs de y pour une même valeur de x, ce qui est impossible.

D'ailleurs, il est bien clair que, si le point $[x_0, y_0]$ est compris, sur la branche à laquelle il appartient, entre deux points critiques, ce sera au plus voisin que s'arrêtera la convergence, puisque la série prendra déjà une valeur infinie en ce point.

Supposons, en second lieu, que le point origine ait ses deux coordonnées imaginaires.

Soient

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

les coordonnées de ce point, et

$$x = a_n, \quad y = a'_n$$

les coordonnées du point critique, encore inconnu, par lequel passera la circonférence de la région de convergence ; le carré du module de la différence $x_0 - a_n$ sera

$$(\alpha_0 - a_n)^2 + \beta_0^2 ;$$

or, si un point $[x, y]$ part de

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

et se déplace d'une manière continue, son abscisse $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ variant de $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ à α_0, c'est-à-dire β passant de β_0 à 0 et α restant constamment égal à α_0, ce point ne sortira pas un seul instant de la région de convergence ; par conséquent, la série donnera à chaque instant son ordonnée, notamment lorsque son abscisse sera devenue α_0.

D'un autre côté, si un autre point $[x, y]$ partait du point critique $[a_n, a'_n]$, et que son abscisse variât par valeurs réelles de a_n à α_0, un des points dans lesquels il se décomposerait (1) pénétrerait de plus en plus

(1) Ces points sont toujours en nombre égal au degré de multiplicité du point critique.

dans la région de convergence, et son ordonnée serait aussi à chaque instant donnée par la valeur de la série.

Si donc ce point ne rejoignait pas l'autre, qui est parti de $[x_0, y_0]$, au moment où leurs abscisses prendront la même valeur α_0, la série pourrait donner deux valeurs différentes de y pour une même valeur de x, ce qui est impossible.

Les deux points devront donc se rejoindre.

Mais le second aura suivi l'une des branches de la courbe réelle, ou de la conjuguée $C = \infty$, qui se touchaient au point critique $[a_n, a'_n]$; par conséquent ce point critique devra appartenir à la branche de la courbe à abscisses réelles sur laquelle viendra tomber le point qui partira de $[x_0, y_0]$, et dont l'abscisse aurait varié de $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ à α_0.

Les points critiques à considérer, relativement à l'origine $[x_0, y_0]$, seront donc seulement ceux qui se trouveront sur cette branche.

Du reste, il est clair qu'il faudra prendre celui dont l'abscisse retranchée de x_0 donnera la différence de moindre module. Car 1° ce point pourra être atteint sans sortir de la région qu'il limitera; 2° la série y prendra une valeur infinie; 3° pour aller joindre un autre point critique, il faudrait faire prendre au module de $(x - x_0)$ une valeur supérieure à celui d'une valeur de cette différence pour laquelle la série serait déjà infinie.

Ainsi, dans le cas qui vient d'être examiné, la marche à suivre consistera à déterminer le point d'arrivée du point qui partirait du point origine, et dont l'abscisse aurait varié de manière que sa partie imaginaire tendît directement vers zéro, sa partie réelle restant constante; ensuite à prendre sur la branche de la courbe à abscisses réelles, où se trouvera le point d'arrivée, celui des points critiques dont l'abscisse différerait le moins de la partie réelle de l'abscisse du point origine.

DEUXIÈME CAS.

L'équation $f(x, y) = 0$ *a tous ses coefficients réels; mais quelques points critiques sont imaginaires.*

305. Supposons d'abord que l'abscisse du point origine soit réelle.

Si la région de convergence devait être limitée à l'un des points critiques réels, on saurait, par la théorie précédente, auquel on aurait affaire; mais il pourra arriver que la limite soit un des points critiques imaginaires.

Soient

$$x_0 = \alpha_0, \quad \text{et} \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

les coordonnées du point origine, β'_0 pouvant être nul, et

$$x_n = a_n + b_n\sqrt{-1}, \quad y_n = a'_n + b'_n\sqrt{-1}$$

les coordonnés du point critique imaginaire où serait limitée la région de convergence; le carré du module de $(x_n - x_0)$ sera alors

$$(\alpha_0 - a_n)^2 + b_n^2;$$

si l'on fait partir du point $[a_n + b_n\sqrt{-1}, \alpha'_n + b'_n\sqrt{-1}]$ un point $[x, y]$ assujetti à la condition de continuité, et que l'on fasse converger son abscisse vers a_n, en faisant tendre vers zéro la partie imaginaire de cette abscisse, un des points dans lesquels il se décomposera pénétrera de plus en plus dans l'intérieur de la région de convergence, puisque le module de la différence de son abscisse et de celle du point origine variera de

$$(\alpha_0 - a_n)^2 + b_n^2 \quad \text{à} \quad (\alpha_0 - a_n)^2;$$

par conséquent l'ordonnée de ce point sera constamment donnée par la valeur de la série.

D'un autre côté, si l'on fait partir un autre point $[x, y]$ du point origine et qu'on fasse tendre son abscisse vers a_n par valeurs réelles, ce point ne sortira pas un instant de la région de convergence; les deux points devront donc se confondre quand leurs abscisses auront pris la valeur commune a_n.

Mais le point qui sera parti du point origine aura suivi la branche de la courbe à abscisses réelles qui contenait ce point origine.

Par conséquent le point parti du point critique

$$[a_n + b_n\sqrt{-1}, a'_n + b'_n\sqrt{-1}]$$

aura dû tomber sur cette branche.

Les points critiques imaginaires tels qu'aucun des points qui en seraient partis simultanément, ne viendrait tomber sur la branche de la courbe $\beta = 0$, passant par le point origine, ne seront donc pas à considérer.

D'ailleurs cette branche se terminera dans les deux sens par deux points critiques (dont l'un pourra être à l'infini c'est-à-dire ne pas exister), et les points critiques imaginaires tels qu'aucun des points qui en seraient partis simultanément ne viendrait tomber entre ces deux extrémités ne seront pas davantage à considérer.

On prendra, parmi les points critiques restants, celui dont l'abscisse retranchée de x_0 donnera la différence de moindre module, et, s'il n'est resté aucun point critique imaginaire, on prendra, sur la branche partant du point origine, l'extrémité la plus proche de ce point. La démonstration se ferait comme dans le cas précédent.

Le nombre des points critiques imaginaires peut être considérable, et il y aurait avantage à en écarter d'avance le plus grand nombre possible. On en supprimera un grand nombre en remarquant que, la région de convergence relative à une origine située sur une branche de la

courbe $\beta = 0$, ne pouvant en aucun cas entamer ni l'une ni l'autre des branches de la même courbe qui comprennent la branche où se trouve le point origine, les points critiques à considérer seront seulement ceux qui seront compris entre ces deux branches.

Si le point origine avait son abscisse imaginaire, on la ramènerait aisément à être réelle, comme on le verra dans le paragraphe suivant. Nous passons donc immédiatement au troisième cas.

TROISIÈME CAS.

L'équation $f(x, y) = 0$ *a ses coefficients imaginaires.*

306. Si l'on suppose d'abord que le point origine ait son abscisse réelle, on démontrera, comme dans le cas précédent, que les points critiques à considérer seront seulement ceux auxquels on parviendrait directement en partant des points situés sur la branche de la conjuguée $C = \infty$ où se trouve l'origine, qui auraient pour abscisses les parties réelles des abscisses de ces points critiques, et faisant varier β de zéro aux parties imaginaires de ces mêmes points critiques.

Celui des points critiques, remplissant cette condition, dont l'abscisse retranchée de l'abscisse de l'origine donnera la différence de moindre module, sera la limite de la région de convergence. On le démontrerait comme précédemment.

Supposons maintenant que le point origine ait son abscisse imaginaire et soient

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}.$$

Si l'on remplace, dans l'équation proposée $f(x, y) = 0$, x par $x + \beta_0\sqrt{-1}$, le lieu, considéré dans son ensemble, ne changera pas; les points critiques seront les mêmes, leurs ordonnées seront les mêmes et leurs abscisses auront seulement diminué de $\beta_0\sqrt{-1}$; les conjuguées auront bien changé, mais elles seront formées des points de l'ancien lieu, et il sera facile de les construire. D'un autre côté, le point origine sera devenu

$$x_0 = \alpha_0, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1};$$

mais la région de convergence sera restée la même par ces deux raisons que, aux points correspondants, les dérivées de tous les ordres de y par rapport à x seront restées les mêmes, et que les valeurs de $x - x_0$, pour les points correspondants, seront aussi restées les mêmes, x et x_0 ayant varié de la même quantité.

La question sera donc restée au fond la même; mais, l'abscisse du point origine étant devenue réelle, on pourra appliquer la méthode qui convient à ce cas.

307. Si l'on voulait éviter la substitution de $x + \beta_0\sqrt{-1}$ à x dans l'équation, substitution qui en effet pourra quelquefois compliquer beaucoup cette équation, on le pourrait en considérant que la conjuguée $C = \infty$ du nouveau lieu ne sera autre chose que la courbe

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1}$$

de l'ancien, et que cette courbe jouera par conséquent, dans la question, le même rôle que la conjuguée $C = \infty$, dans le cas où l'abscisse du point origine était réelle.

On construira donc la branche de la courbe

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1},$$

qui partirait du point origine, et pour savoir si l'un des points critiques du lieu,

$$x_n = a_n + b_n\sqrt{-1}, \quad y_n = a'_n + b'_n\sqrt{-1},$$

serait à considérer, on en fera partir un point $[x, y]$ dont on fera varier l'abscisse de

$$a_n + b_n\sqrt{-1} \quad \text{à} \quad a_n + \beta_0\sqrt{-1}.$$

Si l'un des points dans lesquels se décomposera ce point $[x, y]$ vient tomber sur la branche en question de la courbe $x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1}$, il faudra conserver le point critique correspondant.

On prendra toujours ensuite pour limite de la région de convergence celui des points critiques conservés, dont l'abscisse retranchée de x_0 donnera la différence de moindre module.

308. On peut évidemment résumer dans un même énoncé général les règles relatives aux trois cas, que nous n'avons du reste distingués que parce qu'il y correspondra des difficultés pratiques bien différentes.

Soient $f[x, y] = 0$ l'équation qui définit la fonction y, que l'on veut développer, et

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

le système de valeurs de x et de y à partir duquel on veut développer y ; on déterminera le point d'arrêt par la règle suivante :

On construira les courbes formées des points $[x, y]$ correspondant aux solutions de l'équation $f[x, y] = 0$ où x serait de la forme

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1},$$

la partie réelle de x variant ainsi seule.

Ces courbes partageront le plan en bandes, et les points critiques qui

seront à considérer seront seulement ceux qui se trouveront contenus dans les deux bandes comprises entre la courbe sur laquelle se trouvera le point origine $[x_0, y_0]$ et les deux courbes voisines, dans un sens et dans l'autre.

Soient

$$x_n = a_n + b_n\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y_n = a'_n + b'_n\sqrt{-1}$$

les coordonnées d'un des points critiques remplissant cette condition, et p son degré de multiplicité : on fera varier x de $a_n + b_n\sqrt{-1}$ à $a_n + \beta_0\sqrt{-1}$, et l'on suivra dans leur marche les p points qui partiront du point critique.

Si aucun de ces p points ne vient tomber sur la branche de la courbe caractérisée par l'équation

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1}$$

à laquelle appartient le point origine, le point critique en question ne sera pas à considérer.

On prendra, parmi les points critiques qui resteront, celui dont l'abscisse, retranchée de $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$, donnera la différence de moindre module; la série sera convergente pour toute valeur de x telle que le module de $x - x_0$ se trouve moindre que le module trouvé, et divergente pour toute autre valeur.

309. Cette règle est assez compliquée, et sa mise en pratique exigera des opérations délicates qui deviendront même très-pénibles, pour peu que l'équation $f(x, y) = 0$ se complique; mais il ne peut subsister aucun espoir de réduire ces opérations, par la raison que la règle comprend toutes les conditions du problème et ne comprend qu'elles; il ne saurait donc être question que de faciliter cette mise en pratique par l'application d'une méthode convenable.

Je crois que celle que j'ai donnée dans les chapitres XX et XXI, pour suivre la marche d'un point $[x, y]$ assujetti à la continuité, sera adoptée de préférence; mais avant d'indiquer les simplifications qu'elle comportera, en raison des conditions particulières que présente la question actuelle, je ferai remarquer que l'on pourrait toujours, si l'on y tenait, se servir de celle qu'a indiquée M. Puiseux en 1851, dans un autre but.

En effet tout se réduit, en définitive, à savoir si un point $[x, y]$ parti de

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

arrivera à un point critique désigné

$$x^n = a_n + b_n\sqrt{-1}, \quad y_n = a'_n + b'_n\sqrt{-1},$$

lorsque x aura varié d'abord de $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ à $a_n + \beta_0\sqrt{-1}$ et ensuite de $a_n + \beta_0\sqrt{-1}$ à $a_n + b_n\sqrt{-1}$.

Or on trancherait effectivement la question d'une façon sûre en divisant le chemin en parties telles que le module de la différence des valeurs de x correspondant à deux points de division consécutifs restât toujours inférieur au module de l'excès de la valeur de x correspondant au premier de ces deux points sur l'abscisse du point critique le plus voisin, et se servant de la série pour calculer de proche en proche la valeur finale de y.

L'application de cette méthode serait au reste singulièrement facilitée par cette circonstance, que l'accroissement donné à x pour passer d'un point de division du chemin dont il s'agit au suivant serait toujours composé d'une seule partie, réelle ou imaginaire, ce qui éviterait la formation des puissances successives d'un même binôme, formation à laquelle il eût fallu se résoudre dans le cas général pour lequel M. Puiseux avait imaginé sa méthode.

Ainsi, en s'en tenant même à cette méthode, quelque imparfaite qu'elle soit, on n'en devrait pas moins regarder la question comme résolue, au moins théoriquement.

Mais il est bien facile de montrer d'autre façon que les recherches pratiques qu'exigera l'emploi de la règle énoncée ne comporteront jamais que des difficultés que l'on sait d'avance résoudre.

Nous insisterons d'abord sur le procédé à employer pour rejeter à l'avance tous ceux des points critiques qui ne se trouveraient pas compris entre les deux branches de la courbe

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1},$$

qui comprennent elles-mêmes celle où se trouve le point origine.

Les points critiques appartenant tous à l'enveloppe totale des conjuguées, il suffira, pour trancher la question, de savoir d'une part en quels points cette enveloppe est coupée par les m branches de la courbe

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1},$$

et de distinguer ensuite parmi ces points de rencontre celui qui appartiendra à celle des branches de cette courbe qui passerait par le point origine; car les points critiques qui n'appartiendraient pas aux deux segments de l'enveloppe limités à ce dernier point devraient être écartés.

Or, pour déterminer tous les points de rencontre en question, on n'aura qu'à résoudre les équations

$$f\left(\alpha + \beta\sqrt{-1},\quad \alpha' + \beta'\sqrt{-1}\right) = 0$$

$$\frac{\dfrac{df}{d\alpha + d\beta\sqrt{-1}}}{\dfrac{df}{d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}}} = \text{réel},$$

$$\beta' = \beta_0.$$

D'un autre côté, la construction d'une branche définie de la courbe

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1},$$

de celle, par exemple, qui passerait par le point origine, se fera pour ainsi dire à main levée, lorsqu'on aura tracé à l'avance, comme on doit le supposer, et comme il est toujours si facile de le faire, le tableau général des conjuguées du lieu ; en effet, la valeur variable de β est la moitié de la projection sur l'axe des x de la corde réelle menée du point $[x, y]$ dans la conjuguée à laquelle appartient ce point ; de sorte que la courbe

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1}$$

n'est autre chose que le lieu des extrémités des cordes réelles des diverses conjuguées dont les projections sur l'axe des x sont égales à $2\beta_0$.

Ainsi il sera toujours relativement facile d'écarter à l'avance le plus grand nombre des points critiques.

Pour déterminer ensuite le point d'arrêt, parmi les points critiques qui resteront à considérer, on n'aura plus à faire varier que la partie imaginaire de x, et par conséquent la question se présentera dans des conditions bien plus simples que celles où je l'ai traitée dans les chapitres XX et XXI, sur des exemples assez compliqués déjà pour montrer que la méthode était praticable.

CHAPITRE XXV

CONSTRUCTION DU PÉRIMÈTRE DE LA RÉGION DE CONVERGENCE DE LA SÉRIE DE TAYLOR ET DES PORTIONS DES DIFFÉRENTES CONJUGUÉES COMPRISES DANS CETTE RÉGION, OU CONSTRUCTION DU TABLEAU GÉNÉRAL DES VALEURS D'UNE FONCTION QUE PEUT FOURNIR LE DÉVELOPPEMENT DE CETTE FONCTION SUIVANT LA SÉRIE DE TAYLOR.

310. La fonction

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \dots,$$

essentiellement unique, déterminée et finie, tant que la série qui la constitue reste convergente, n'est, si l'on peut s'exprimer ainsi, qu'une portion de la fonction y, généralement multiple, définie par l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

qui a servi à calculer la valeur initiale y_0 et les coefficients différentiels des divers ordres

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \dots;$$

le lieu représenté par l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \dots$$

n'est, de même, qu'un segment du lieu total représenté par l'équation

$$f(x, y) = 0.$$

La détermination précise de ce segment constitue évidemment une partie essentielle de la théorie de la série de Taylor.

Cette question ne présente pas de grandes difficultés : je ferai toutefois remarquer qu'elle n'était abordable qu'autant, d'abord, qu'on disposât d'un moyen convenable de classification des solutions imaginaires d'une

équation à deux variables, ensuite qu'on eût une méthode directe pour déterminer la valeur finale que prendrait la fonction y, assujettie à la continuité, lorsque la variable x serait parvenue de sa valeur initiale à la valeur finale qu'on voulait lui faire prendre, en suivant une loi de progression donnée; car, quant à se servir de la série elle-même pour calculer de proche en proche les valeurs de y, comme l'avait proposé M. Puiseux, ce serait peu réalisable.

Nous avons désigné sous le nom de *région de convergence* la portion du plan recouverte par l'ensemble des points fournis par l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \dots,$$

il s'agit de déterminer le périmètre de cette région et la portion de chaque conjuguée qui s'y trouve comprise.

Ce périmètre passe par le point critique du lieu considéré où s'arrête la convergence de la série, et tous ses autres points ont pour abscisses les quantités qui, retranchées de la valeur initiale x_0 de x, fournissent des différences de même module que la différence entre x_0 et l'abscisse du point d'arrêt.

Ainsi, si

$$x_1 = a + b\sqrt{-1}, \quad y_1 = a' + b'\sqrt{-1}$$

est celui des points critiques où s'arrête la convergence, et que

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

soient les valeurs initiales de x et de y, le périmètre de la région de convergence sera caractérisé par l'équation

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = (a - \alpha_0)^2 + (b - \beta_0)^2,$$

ou

$$(\alpha^2 - a^2) + (\beta^2 - b^2) - 2(\alpha - a)\alpha_0 - 2(\beta - b)\beta_0 = 0,$$

α et β désignant les parties réelle et imaginaire variables de x.

La question est donc de suivre de proche en proche la marche de y lorsque $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ varie à partir de $x_1 = a + b\sqrt{-1}$, en suivant le chemin

$$(\alpha^2 - a^2) + (\beta^2 - b^2) - 2(\alpha - a)\alpha_0 - 2(\beta - b)\beta_0 = 0.$$

Les points du périmètre qui auront même caractéristique appartiendront à une même conjuguée et formeront les extrémités de l'arc de cette conjuguée compris dans l'intérieur de la région de convergence; de sorte que, si l'on a tracé d'avance ces conjuguées et qu'on relève pour chacune d'elles la portion comprise dans l'intérieur de la région

de convergence, on aura le tableau de toutes les valeurs de la fonction y que pourra fournir la série.

311. Si l'équation $f(x, y) = 0$ est du degré m, elle fournira entre α, β, α' et β' deux équations de degré m. En y joignant les trois équations

$$\alpha^2 - a^2 + \beta^2 - b^2 - 2(\alpha - a)\alpha_0 - 2(\beta - b)\beta_0 = 0,$$
$$x = \alpha + \beta,$$
$$y = \alpha' + \beta',$$

et éliminant α, β, α' et β', on aurait l'équation du périmètre de la région de convergence, qui serait du degré $2m^2$.

Mais la courbe ainsi obtenue comprendrait une foule de branches parasites, puisqu'elle contiendrait les m points du lieu $f(x, y) = 0$ qui correspondraient à une même valeur de x satisfaisant à la condition

$$\alpha^2 - a^2 + \beta^2 - b^2 - 2(\alpha - a)\alpha_0 - 2(\beta - b)\beta_0 = 0,$$

tandis que la courbe cherchée n'en devrait comprendre qu'un.

D'ailleurs la méthode qu'on aurait suivie ne pourrait fournir aucune indication propre à permettre d'éliminer les branches parasites du lieu.

On ne recourra donc pas habituellement à cette méthode, qui ne donnerait qu'un résultat brut dont on ne saurait que faire.

Le principal moyen qu'on emploiera pour traiter la question se tirera de cette remarque, que la courbe cherchée ne saurait entamer ni l'une ni l'autre des deux branches de la courbe caractérisée par l'équation générale

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1},$$

qui comprendraient immédiatement celle où se trouve le point origine. Cette remarque fournira le moyen d'éliminer les solutions étrangères que le calcul aura fournies.

312. Nous commencerons par la construction de la tangente à la courbe en un quelconque de ses points, parce que cette question est la plus simple.

Soient

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

les coordonnées d'un point du périmètre cherché, et

$$m + n\sqrt{-1}$$

la valeur du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$ en ce point ; les coordonnées du point infiniment voisin du périmètre seront

$$x + d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$$

et

$$y + (m + n\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}) = y + (md\alpha - nd\beta) + (nd\alpha + md\beta)\sqrt{-1};$$

de sorte que le coefficient angulaire de la tangente cherchée sera

$$\frac{md\alpha - nd\beta + nd\alpha + md\beta}{d\alpha + d\beta}$$

ou

$$\frac{m + n + (m - n)\frac{d\beta}{d\alpha}}{1 + \frac{d\beta}{d\alpha}}.$$

D'ailleurs $\frac{d\beta}{d\alpha}$ s'obtiendra en différentiant l'équation

$$(\alpha^2 - a^2) + (\beta^2 - b^2) - 2(\alpha - a)\alpha_0 - 2(\beta - b)\beta_0 = 0,$$

qui donnera

$$(\alpha - \alpha_0)\, d\alpha + (\beta - \beta_0)\, d\beta = 0,$$

d'où

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}.$$

Par suite, le coefficient angulaire cherché sera

$$\frac{(m + n)(\beta - \beta_0) - (m - n)(\alpha - \alpha_0)}{(\beta - \beta_0) + (\alpha - \alpha_0)}.$$

315. On déterminera tout aussi aisément le rayon de courbure de la même courbe en un quelconque de ses points.

Soit $p + q\sqrt{-1}$ la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ au point considéré, le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, au point $[x + dx,\ y + dy]$ du périmètre, sera

$$m + n\sqrt{-1} + (p + q\sqrt{-1})\, dx$$

ou

$$m + n\sqrt{-1} + (p + q\sqrt{-1})\left(1 - \frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}\sqrt{-1}\right) d\alpha,$$

c'est-à-dire

$$m + pd\alpha + q\frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}d\alpha + \left(n + qd\alpha - p\frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}d\alpha\right)\sqrt{-1};$$

le coefficient angulaire de la tangente au périmètre en ce point $[x + dx, y + dy]$ sera donc

$$\frac{\left[m+n+(p+q)\,d\alpha-(p-q)\frac{\alpha-\alpha_0}{\beta-\beta_0}d\alpha\right](\beta+d\beta-\beta_0)}{(\beta+d\beta-\beta_0)+(\alpha+d\alpha-\alpha_0)}$$
$$-\frac{\left[m-n+(p-q)\,d\alpha+(p+q)\frac{\alpha-\alpha_0}{\beta-\beta_0}d\alpha\right](\alpha+d\alpha-\alpha_0)}{(\beta+d\beta-\beta_0)+(\alpha+d\alpha-\alpha_0)};$$

l'angle de contingence sera, en conséquence,

$$\frac{d\alpha}{\beta-\beta_0}\,\frac{(\beta-\beta_0+\alpha-\alpha_0)\left\{(p+q)[(\beta-\beta_0)^2-(\alpha-\alpha_0)^2]-2(p-q)(\beta-\beta_0)(\alpha-\alpha_0)\right\}-2m[(\beta-\beta_0)^2+(\alpha-\alpha_0)^2]}{(\beta-\beta_0+\alpha-\alpha_0)^2+[(m+n)(\beta-\beta_0)-(m-n)(\alpha-\alpha_0)]^2};$$

quant à l'élément du périmètre, c'est

$$\sqrt{(d\alpha'+d\beta')^2+(d\alpha+d\beta)^2},$$

ou

$$\sqrt{1+\left[\frac{(m+n)(\beta-\beta_0)-(m-n)(\alpha-\alpha_0)}{\beta-\beta_0+\alpha-\alpha_0}\right]^2}\left(1-\frac{\alpha-\alpha_0}{\beta-\beta_0}\right)d\alpha;$$

le rayon de courbure sera donc

$$\frac{[(\beta-\beta_0)-(\alpha-\alpha_0)]\left\{(\beta-\beta_0+\alpha-\alpha_0)^2+[(m+n)(\beta-\beta_0)-(m-n)(\alpha-\alpha_0)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{(\beta-\beta_0+\alpha-\alpha_0)\left\{(p+q)[(\beta-\beta_0)^2-(\alpha-\alpha_0)^2]-2(p-q)(\beta-\beta_0)(\alpha-\alpha_0)\right\}-2m[(\beta-\beta_0)^2+(\alpha-\alpha_0)^2]}.$$

314. Voyons maintenant comment on obtiendra des points de la courbe en nombre suffisant pour la construire.

La question se réduit à trouver les points où elle coupe chaque conjuguée. Or soit C la caractéristique d'une conjuguée, de sorte que le long de cette conjuguée $\frac{\beta'}{\beta} = C$; les points cherchés seront fournis par les deux équations comprises dans

$$f(\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha'+\beta C\sqrt{-1})=0,$$

et par la condition

$$(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta-\beta_0)^2=(a-\alpha_0)^2+(b-\beta_0)^2;$$

ces trois équations donneront α, β et α', dont on formera les coordonnées des points cherchés; mais elles fourniront beaucoup de solutions étrangères, dont on se débarrassera comme il a été dit plus haut.

Pour ne pas multiplier inutilement les essais, on fera bien de commencer par déterminer les conjuguées tangentes au périmètre de la région de convergence; pour cela, on n'aura qu'à éliminer α et α' entre les équations

$$f\left(\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \alpha'+\beta C\sqrt{-1}\right)=0,$$
$$(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta-\beta_0)^2=(a-\alpha_0)^2+(b-\beta_0)^2,$$

et à exprimer que l'équation résultante en β a deux racines égales. A la vérité, l'équation propre à déterminer les valeurs extrêmes de C fournira aussi beaucoup de solutions étrangères; mais on s'en débarrassera par les moyens qu'on a déjà indiqués.

315. Le point important de la question est de fixer la figure du périmètre de la région de convergence aux environs du point d'arrêt.

Nous rappellerons d'abord que les points critiques appartiennent toujours à l'enveloppe totale des conjuguées. Ce sont les points de contact des tangentes à cette enveloppe parallèles à l'axe des y, le mot *tangente* étant pris ici dans son acception la plus générale, c'est-à-dire que ce sont les points situés à l'infini sur les branches de l'enveloppe qui ont leurs asymptotes parallèles à l'axe des y, les limites de ses diverses branches dans le sens des x, ses points de rebroussement, etc., les points multiples où les dérivées de y par rapport à x se séparent, sans devenir infinies, étant seuls exceptés.

L'examen complet de la question comporterait naturellement une infinité de cas, puisqu'il faudrait distinguer ceux où les degrés de multiplicité des points d'arrêt seraient différents, et, pour chaque valeur du degré de multiplicité, passer en revue toutes les hypothèses possibles.

Nous nous bornerons à l'examen des trois cas les plus simples et les plus usuels : celui où le point d'arrêt serait l'extrémité d'une branche de l'enveloppe asymptote à une parallèle à l'axe des y; celui où ce serait le point de contact avec l'enveloppe d'une tangente simple parallèle à l'axe des y; enfin celui où ce serait un point de rebroussement de l'enveloppe où $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ serait infini.

Dans le premier cas, le périmètre de la région de convergence devant contenir le point d'arrêt sera naturellement asymptote à la même parallèle à l'axe des y que la branche de l'enveloppe qui irait passer par ce point.

Dans le second cas, le périmètre de la région de convergence sera tangent à l'enveloppe au point d'arrêt, puisque l'enveloppe est tangente à toutes les courbes continues qui ont un point commun avec elle; mais, au reste, on le vérifierait aisément sur la formule trouvée plus haut du coefficient angulaire de la tangente au périmètre,

$$\frac{(m+n)(\beta-\beta_0)-(m-n)(\alpha-\alpha_0)}{(\beta-\beta_0)+(\alpha-\alpha_0)};$$

en effet, $\frac{dy}{dx}$ étant infini au point d'arrêt, m ou n seront infinis, et par conséquent le coefficient angulaire de la tangente au périmètre sera aussi infini.

Enfin, dans le troisième cas, la formule trouvée plus haut pour représenter le rayon de courbure du périmètre, donnera évidemment une valeur nulle pour ce rayon de courbure au point d'arrêt, puisque l'une au moins des quantités p et q sera infinie; par conséquent, lorsque le point d'arrêt sera un point de rebroussement de l'enveloppe du lieu, ce sera aussi un point de rebroussement du périmètre de la région de convergence.

316. Nous placerons ici une autre remarque qui aidera puissamment à la construction du périmètre de la région de convergence, à partir du point d'arrêt; c'est qu'une courbe quelconque, caractérisée par une équation

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

qui passerait au point d'arrêt, où elle serait naturellement tangente à l'enveloppe, ne saurait, en aucun cas, pénétrer dans la région de convergence que par l'un seulement des deux arcs qui partiraient en sens contraire de ce point d'arrêt. En effet, l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ étant supposée admettre la solution $\alpha = a$, $\beta = b$, si l'on fait varier α et β à partir de a et de b, en désignant par $d\alpha$ et $d\beta$ les accroissements de α et de β, on aura

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{\varphi'_a(a,b)}{\varphi'_b(a,b)},$$

$d\alpha$ pouvant être positif ou négatif, mais $d\alpha$ et $d\beta$ devant changer en même temps de signes.

D'un autre côté, l'inégalité

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 < (a - \alpha_0)^2 + (b - \beta_0)^2,$$

qui, pour rester satisfaite à partir de $\alpha = a$, $\beta = b$, exigerait que

$$(a - \alpha_0)\, d\alpha + (b - \beta_0)\, d\beta$$

restât négatif, sera bien remplie par l'un des systèmes de valeurs de $d\alpha$ et de $d\beta$, données par l'équation

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\varphi'_a(a, b)}{\varphi'_b(a, b)},$$

mais ne le sera pas par l'autre; par conséquent, la courbe caractérisée par l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ ne pénétrera dans la région de convergence que par l'un de ses deux arcs partant en sens contraire du point d'arrêt.

Cette remarque, appliquée à l'enveloppe et à la conjuguée qui la touche au point d'arrêt, conduit à des résultats importants.

Il en résulte que la série qui, selon les cas, peut représenter les ordonnées d'arcs plus ou moins étendus, à partir du point d'arrêt, de l'enveloppe ou de la conjuguée qui passe en ce point, ne saurait en aucun cas fournir l'ordonnée d'un seul point du prolongement de l'un de ces arcs au delà du point d'arrêt ; le point d'arrêt est toujours l'une des extrémités de l'arc de l'enveloppe ou de la conjuguée qui y passe, dont la série puisse fournir les ordonnées, en d'autres termes la série ne peut servir à passer de l'une à l'autre des deux branches de l'enveloppe que sépare le point d'arrêt, ou de la conjuguée qui y passe. On peut le vérifier directement de la manière suivante :

Soient x_1, y_1 ; les coordonnées du point d'arrêt $\frac{dy}{dx}$ y étant infini, $\frac{dx}{dy}$ y sera nul ; l'abscisse x du lieu, développée à partir de $x = x_1$, sera donc représentée par

$$x = x_1 + \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_1 \frac{(y - y_1)^2}{1.2} + \ldots,$$

c'est-à-dire qu'à des valeurs de y équidistantes de y_1 il correspondra des valeurs égales de x.

Or si $(p + q\sqrt{-1})$ représente la valeur de $\frac{d^2x}{dy^2}$ en un point

$$[x = \alpha + \beta\sqrt{-1},\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}]$$

de l'enveloppe, la condition pour que le point mobile $[x, y]$ reste sur cette enveloppe est que la différentielle de $\frac{dx}{dy}$, ou $(p + q\sqrt{-1})\,dy$, soit réelle, c'est-à-dire que

$$p d\beta' + q d\alpha' = 0.$$

On obtiendra donc deux points de l'enveloppe, voisins du point $[x_1, y_1]$, dans l'un et dans l'autre sens, en donnant à y les deux valeurs

$$y = y_1 \pm \left(1 - \frac{q}{p}\sqrt{-1}\right) d\alpha',$$

équidistantes de y_1.

Or ces deux ordonnées, équidistantes de y_1, correspondraient à une même abscisse. Si donc la série pouvait fournir les ordonnées des points d'un arc de l'enveloppe s'étendant de part et d'autre du point critique, elle pourrait, pour une même valeur de x, fournir deux valeurs différentes de y, ce qui est impossible.

Le théorème est donc établi en ce qui concerne l'enveloppe.

Soit maintenant C la caractéristique du point critique $[x_1, y_1]$; l'abscisse du lieu étant représentée par

$$x = x_1 + (p + q\sqrt{-1})\frac{(y - y_1)^2}{1.2} + \ldots,$$

les différentielles $d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$ et $d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}$ de x et de y à partir du point $[x_1, y_1]$ seront liées par la relation

$$d\alpha + d\beta\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})\frac{(d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1})^2}{1.2}$$

d'où

$$2d\beta = 2pd\alpha'd\beta' + q(d\alpha'^2 - d\beta'^2);$$

pour que le point mobile reste sur la conjuguée C, il faudra donc que

$$\frac{2d\beta}{2pd\alpha'd\beta' + q(d\alpha'^2 - d\beta'^2)} = C$$

ou que

$$\frac{2}{C} = 2pd\alpha' + q\left(d\alpha'\frac{d\alpha'}{d\beta'} - d\beta'\right).$$

Cette condition exige que $\frac{d\alpha'}{d\beta'}$ soit infini : α' devra donc varier seul ; par conséquent, en prenant pour y les deux valeurs

$$y = y_1 \pm d\alpha',$$

on obtiendra deux points de la conjuguée passant au point critique, infiniment voisins de ce point et placés de part et d'autre par rapport à lui.

Mais ces deux points ayant leurs ordonnées équidistantes de y_1, correspondraient à une même abscisse. Si donc la série pouvait fournir les ordonnées des points d'un arc de la conjuguée critique s'étendant de part et d'autre du point critique, elle pourrait, pour une même valeur de x, fournir deux valeurs différentes de y, ce qui est impossible.

On peut encore ajouter que, si l'on place le point origine sur l'enveloppe à une distance suffisamment petite de l'un des points critiques, la série ne pourra pas fournir l'ordonnée d'un seul point de la conjuguée passant en ce point critique.

En effet, la région de convergence s'étendant du point $[x_0, y_0]$ au point critique $[x_1, y_1]$ et pouvant fournir tous les points de l'arc de l'enveloppe limité à ces deux points $[x_0, y_0]$ et $[x_1, y_1]$, si l'on conçoit une conjuguée tangente à l'enveloppe en un point $[x', y']$ compris entre $[x_0, y_0]$ et $[x_1, y_1]$, comme la série ne sera pas encore divergente en $[x', y']$,

elle pourra servir à passer sur cette conjuguée et à la parcourir dans un sens et dans l'autre jusqu'aux points $[x, y]$ pour lesquels le module de la différence $x_0 - x$ serait égal à celui de $x_0 - x_1$.

Mais des deux arcs de la conjuguée allant du point $[x', y']$ aux deux points $[x, y]$ qui viennent d'être définis, l'un prolonge directement le chemin déjà parcouru sur l'enveloppe et se rapproche du point critique; et cet arc, le long duquel le module de la différence $x_0 - x$ ne peut qu'augmenter, sera d'autant moindre que le point $[x', y']$ sera plus voisin du point $[x_1, y_1]$, de sorte que les deux arcs $[x'. y'... x_1, y_1]$, $[x', y'... x, y]$ s'évanouiront en même temps. L'arc de la conjuguée mobile que pourra représenter la série à partir du point où cette conjuguée touchera son enveloppe et dans le sens que nous considérons sera donc d'autant moindre que la conjuguée mobile se rapprochera davantage de la conjuguée critique et se réduira à zéro sur cette conjuguée elle-même.

Cela posé, il est facile de voir que le second arc de la conjuguée mobile que la série pourrait fournir, dans le sens contraire, s'évanouira en même temps que le premier. En effet, ici le point infiniment voisin du point critique sur le premier arc de la conjuguée mobile, au moment où elle vient se confondre avec la conjuguée qui passe au point critique, n'échappe à la représentation par la série que parce que le module de la différence $x - x_0$ entre son abscisse et celle du point origine, surpasse celui de la différence $x_1 - x_0$. Mais cette abscisse est aussi celle d'un point de l'autre arc ; la série ne peut donc pas plus fournir l'un que l'autre de ces points.

De même, si l'on place le point origine sur la conjuguée passant en un point critique, à une distance suffisamment petite de ce point critique, la série ne pourra pas fournir l'ordonnée d'un seul point de l'arc de l'enveloppe passant par ce point.

En effet, si le point origine $[x_0, y_0]$ était sur l'une des conjuguées voisines de la conjuguée issue du point critique et tangente à l'enveloppe en un point $[x', y']$, la série pourrait représenter l'arc compris sur cette conjuguée entre le point $[x_0, y_0]$ et le point $[x', y']$, plus un arc de l'enveloppe s'étendant dans les deux sens à partir du point $[x', y']$, et limité, dans un sens, au point critique $[x_1, y_1]$ et, dans l'autre, en un point $[x, y]$ tel que le module de la différence $x_0 - x$ fût égal à celui de la différence $x_0 - x_1$. Mais il est facile de voir que ce point $[x, y]$ serait d'autant plus voisin de $[x', y']$ que celui-ci le serait lui-même davantage de $[x_1, y_1]$, et que les deux distances s'évanouiraient en même temps.

En effet l'arc $[x_1, y_1... x, y]$ devrait changer de sens, sur l'enveloppe, si le point $[x_0, y_0]$, après s'être rapproché de la conjuguée issue du point critique, passait sur une conjuguée placée de l'autre côté par rapport à celle où il se trouvait d'abord; or, avant de changer de sens, cet arc devrait s'évanouir.

Lors donc que le point origine sera sur la conjuguée issue du point d'arrêt, la série ne pourra représenter l'ordonnée d'aucun point de l'enveloppe.

Il est clair du reste que cette dernière proposition ne fournira d'indications sûres qu'autant que le module de $x_1 - x$ croîtra constamment de zéro à la valeur du module de $x_1 - x_0$, lorsque x passera par les valeurs des abscisses des points de la conjuguée issue du point $[x_1, y_1]$ compris entre $[x_0, y_0]$ et $[x_1, y_1]$.

317. Les théorèmes qui précèdent permettent de se rendre compte de la forme que doit affecter dans chaque cas la limite de la région de convergence et de la manière dont cette limite change.

En premier lieu, lorsque le point origine M_0 est situé sur l'enveloppe BAC, la région de convergence coupe chaque conjuguée, qu'elle entame en deux points placés de part et d'autre du point où elle touche l'enveloppe, pourvu que ce point soit assez voisin de M_0. Ces deux points de rencontre tendent à se confondre sur la conjuguée infiniment voisine de la conjuguée DAE qui passe au point critique.

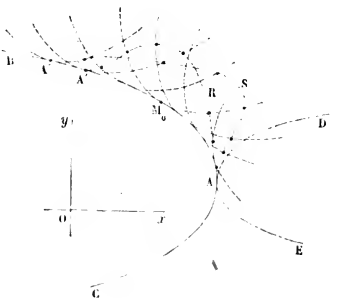


Fig. 14.

Sur la conjuguée qui touche l'enveloppe au point A' tel que les modules des différences des abscisses des points M_0 et A d'une part, M_1 et A' de l'autre, soient égaux, l'un des arcs s'évanouit, mais l'autre subsiste encore un certain temps.

Si la conjuguée s'éloigne encore un peu, l'arc restant a ses deux extrémités d'un même côté du point de contact et finit par s'évanouir lorsque la conjuguée devient tangente au périmètre de la région de convergence.

Cette courbe dessinée en points ronds sur la figure, est tangente à l'enveloppe en A et en A' : en A elle présente un point de rebroussement, la conjuguée qui y est tangente touche l'enveloppe en A''; les points où elle coupe toutes les conjuguées sont marqués d'une manière distincte.

La région de convergence est formée de deux espaces clos, séparé-

ment limités, d'une part, à l'arc AA′ de l'enveloppe, et, de l'autre, aux deux arcs ARA′ et ASA′ de son périmètre.

Si le point origine passait de l'enveloppe sur une conjuguée quelconque, telle que celle qui touche l'enveloppe en M_0 dans la figure précédente, le périmètre de la région de convergence changerait peu du côté de A′; mais cette courbe couperait alors la conjuguée passant en A près de ce point, de sorte qu'un petit arc de cette conjuguée pourrait être fourni par la série. Cet arc, au reste, resterait limité en A et s'étendrait vers D. La série pourrait encore fournir des arcs de plus en plus petits des conjuguées tangentes à l'enveloppe, de A en C, jusqu'à une certaine distance; ces arcs auraient leurs deux extrémités d'un même côté du point de contact avec l'enveloppe. D'ailleurs le rebroussement du périmètre, en A, disparaîtrait.

Si la conjuguée contenant le point origine se rapprochait de la conjuguée issue du point critique, le point de contact de cette conjuguée avec l'enveloppe se rapprochant du point A, l'arc AA′ de cette enveloppe, que pourrait fournir la série, diminuerait, et l'arc de la conjuguée passant au point critique, compris dans la région de convergence augmenterait en même temps, tout en restant toujours limité en A. Le point de contact avec la branche AC de l'enveloppe, de la dernière conjuguée rencontrée par la limite de la région de convergence reculerait en même temps vers C.

Enfin, si le point origine M_0 venait se placer sur la conjuguée passant

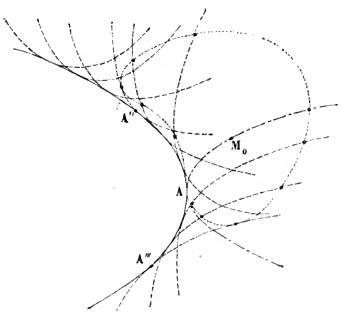


Fig. 15.

au point critique, comme le point mobile $[x.y]$ ne pourrait pas passer sur l'enveloppe, les deux points de rencontre de la limite de la région de convergence avec une conjuguée quelconque appartiendraient toujours à une même des deux branches séparées sur cette conjuguée par le point où elle toucherait l'enveloppe. Cette branche serait celle qui occuperait par rapport au point de contact la même position que le

point M_0 par rapport au point A, ou celle qui serait en continuité avec M_0A.

318. Ces observations générales seront utilement complétées par cette remarque, importante dans la question dont il s'agit, que, si les conjuguées qui avoisinent celle où se trouve le point origine étaient construites avec assez de soin, on pourrait, jusqu'à un certain point, déterminer par tâtonnement les points où chacune d'elles serait coupée par le périmètre de la région de convergence; car la position d'un point d'une conjuguée dont la caractéristique est donnée déterminant les deux parties de l'abscisse de ce point, il n'y aurait, pour savoir si un point d'une conjuguée est ou non compris dans la région de convergence, qu'à déterminer le signe de la différence

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 - (a_1 - \alpha_0)^2 - (b_1 - \beta_0)^2.$$

319. Lorsque le point origine $x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$, $y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$ se déplace sur le lieu $f(y, x) = 0$, la région de convergence se déforme insensiblement en conservant pendant un certain temps pour limite le même point critique

$$\left[a_n + b_n\sqrt{-1},\ a'_n + b'_n\sqrt{-1}\right];$$

mais, si le déplacement du point origine est assez considérable, la limite de la région de convergence doit finir par tomber en un autre point critique

$$\left[a_p + b_p\sqrt{-1},\ a'_p + b'_p\sqrt{-1}\right].$$

Au moment où le point d'arrêt va changer, il y a un instant où le périmètre de la région de convergence passe à la fois par le point $\left[a_n + b_n\sqrt{-1},\ a'_n + b'_n\sqrt{-1}\right]$, dont il va se séparer définitivement, et par le point $\left[a_p + b_p\sqrt{-1},\ a'_p + b'_p\sqrt{-1}\right]$, sur lequel il va rouler pendant un certain temps.

On peut appeler *courbe d'équilibre*, relativement aux deux points critiques

$$\left[a_n + b_n\sqrt{-1},\ a'_n + b'_n\sqrt{-1}\right]$$

et

$$\left[a_p + b_p\sqrt{-1},\ a'_p + b'_p\sqrt{-1}\right],$$

le lieu des points du lieu $f(x, y) = 0$, tels que, s'ils étaient pris pour points origines, la région de convergence correspondante serait limitée à la fois à ces deux points critiques; l'équation caractéristique de cette courbe d'équilibre est

$$(\alpha - a_n)^2 + (\beta - b_n)^2 = (\alpha - a_p)^2 + (\beta - b_p)^2$$

ou

$$2\alpha(a_p - a_n) + 2\beta(b_p - b_n) = a_p^2 - a_n^2 + b_p^2 - b_n^2.$$

Cette équation est du premier degré; elle ne donnera donc qu'une valeur de β pour chaque valeur de α; toutefois, à chaque valeur de $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, il correspond m valeurs de y, en sorte que chaque courbe d'équilibre paraîtrait devoir se composer de m branches s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$; mais de ces m branches il n'y en aura évidemment qu'une qui répondra à la question, parce que, lorsque le point $[x_0, y_0]$ aura dépassé dans un sens ou dans l'autre la courbe d'équilibre entre les deux points critiques considérés, la région de convergence cessera de passer par le point critique où elle était limitée d'abord, et que la question de sa limite se posera alors entre l'autre de ces deux points critiques et un troisième.

320. La considération des courbes d'équilibre peut être très-utile pour simplifier des recherches particulières; ces courbes présentent, en tout cas, un grand intérêt; mais il n'y aura lieu d'en faire une étude spéciale qu'à propos de chaque exemple.

Je me bornerai ici à faire remarquer que la courbe d'équilibre relative à deux points critiques imaginaires conjugués est toujours la courbe réelle; car, si $a_p + b_p\sqrt{-1} = a_n - b_n\sqrt{-1}$, l'équation de la courbe d'équilibre se réduit à $\beta = 0$. Or cette équation ne saurait s'appliquer à aucune branche de la conjuguée $C = \infty$; car, relativement à cette branche, elle signifierait que, si la région de convergence relative au point

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

était limitée au point critique

$$a_n + b_n\sqrt{-1}, \quad a'_n + b'_n\sqrt{-1},$$

celle qui se rapporterait au point

$$x_0 = \alpha_0 - \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 - \beta'_0\sqrt{-1}$$

serait limitée au point

$$a_n - b_n\sqrt{-1}, \quad a'_n - b'_n\sqrt{-1}.$$

321. On sait que les points critiques réels d'un lieu sont les points de contact avec la courbe réelle des tangentes qu'on peut lui mener parallèlement à l'axe des y, et que les points critiques imaginaires sont les points de contact des tangentes qu'on peut mener dans la même direction à l'enveloppe imaginaire des conjuguées, c'est-à-dire au lieu des points du lieu pour lesquels $\frac{dy}{dx}$ est réel, parce qu'une valeur infinie

de $\frac{dy}{dx}$ doit être considérée comme réelle, la tangente d'un angle imaginaire $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ ne pouvant devenir infinie que dans l'hypothèse $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ et $\psi = 0$.

Quant aux autres points critiques, où les dérivées de y par rapport à x ne commencent à devenir infinies qu'à partir du second ordre, ou du troisième, etc., ils proviennent toujours de la réunion accidentelle de divers points critiques simples en un seul, et, par conséquent, n'appartiennent pas moins que les premiers à l'enveloppe.

Or, lorsque les coefficients de l'équation du lieu varient d'une manière continue, tout en restant réels, la courbe réelle et l'enveloppe imaginaire de ses conjuguées se déforment d'une manière continue. Il résulte de ces deux observations que, les coefficients de l'équation venant à varier d'une manière continue, les points critiques se déplaceront aussi d'une manière continue sur le plan, et que, par conséquent, si l'abscisse $x_0 = \alpha'_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ du point origine reste fixe, son ordonnée $y_0 = \alpha_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$ restant, bien entendu, assujettie à satisfaire, concurremment avec x_0, à l'équation variable du lieu, ou encore si x_0 et y_0 varient ensemble d'une manière continue, en même temps que les coefficients de l'équation du lieu, la région de convergence se déformera elle-même d'une manière continue.

Mais si, partant d'une équation à coefficients réels, représentant une courbe réelle, dont les conjuguées pourront avoir une seconde enveloppe imaginaire, on donne à ces coefficients, assujettis à la condition de continuité, des accroissements imaginaires, d'abord infiniment petits, l'enveloppe totale, alors complétement imaginaire, des conjuguées du nouveau lieu, différera d'abord infiniment peu, comme position et comme forme, de l'enveloppe, en partie réelle, en partie imaginaire, de l'ancien lieu, et elle se déformera ensuite d'une manière continue.

Cette proposition a été établie dans le tome premier.

Il en résulte que, dans le cas encore où les coefficients de l'équation d'une courbe passeraient d'une manière continue de l'état réel à l'état imaginaire, la région de convergence se déformerait toujours d'une manière continue.

Il y a toutefois à cette règle générale une exception d'un genre particulier qu'il importe de signaler : si les coefficients de l'équation varient de façon que le lieu acquière un point multiple où les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ soient différentes, les points critiques qui viennent se confondre en ce point multiple disparaissent alors comme points critiques, de sorte que si, en raison de la position du point origine, la région de convergence était auparavant limitée à l'un d'eux, son périmètre doit alors changer brusquement.

APPLICATIONS.

322. Considérons d'abord l'équation

$$xy = \frac{c^2}{4}.$$

Le lieu comporte deux points critiques situés à l'infini sur l'axe des y, dans les deux sens, mais qui correspondent à une même abscisse $x = 0$, de sorte que la courbe d'équilibre relative au système de ces deux points n'existe pas, en ce sens qu'elle est indéterminée et que la région de convergence, par suite, sera limitée à la fois aux deux points critiques, quel que soit le point qu'on choisisse pour point origine. Le même fait se présentera évidemment toutes les fois que la courbe représentée par l'équation proposée aura deux branches asymptotes en sens contraires à une même parallèle à l'axe des y, et pourra se reproduire lorsque deux points critiques situés ou non à distance finie auront même abscisse.

La relation entre x et y n'attribuant qu'une seule valeur à y pour chaque valeur de x, la question de la construction du périmètre de la région de convergence sera ici aussi simple que possible.

Soient

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{c^2}{4(\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1})}$$

les coordonnées du point origine, le périmètre de la région de convergence sera caractérisé par l'équation

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = (\alpha_0 - 0)^2 + (\beta_0 - 0)^2$$

ou

$$\alpha^2 - 2\alpha_0\alpha + \beta^2 - 2\beta_0\beta = 0,$$

à laquelle il faudra joindre

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = \frac{c^2}{4(\alpha + \beta\sqrt{-1})} = \frac{c^2}{4}\frac{\alpha - \beta\sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

d'où

$$\alpha' = \frac{c^2}{4}\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{et} \quad \beta' = -\frac{c^2}{4}\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Si l'on veut en coordonnées réelles l'équation du périmètre de la région de convergence, il faudra éliminer α et β entre les équations

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2(\alpha_0\alpha + \beta_0\beta),$$
$$x = \alpha + \beta \quad \text{et} \quad y = \frac{c^2}{4}\frac{\alpha - \beta}{\alpha^2 + \beta^2};$$

l'élimination donne

$$[(8\beta_0 y + c^2)^2 + (8\alpha_0 y - c^2)^2]\,x^2$$
$$+ 4c^2(\alpha_0 + \beta_0)[4(\alpha_0 - \beta_0)y - c^2]\,x = 0,$$

ou, en supprimant la solution $x = 0$, sur laquelle nous reviendrons plus tard,

$$x = -\frac{2c^2(\alpha_0 + \beta_0)[4(\alpha_0 - \beta_0)y - c^2]}{32y^2(\alpha_0^2 + \beta_0^2) + 8c^2y(\beta_0 - \alpha_0) + c^4}.$$

La courbe représentée par cette équation est asymptote à l'axe des y, comme on devait le prévoir. Si l'on égale le dénominateur de x à zéro, on trouve

$$y = c^2\frac{\alpha_0 - \beta_0 \pm (\alpha_0 + \beta_0)\sqrt{-1}}{8(\alpha_0^2 + \beta_0^2)};$$

par conséquent, l'abscisse de la courbe reste toujours finie, comme on devait s'y attendre.

Supposons β_0 nul, l'équation de la courbe deviendra

$$x = \frac{-8c^2\alpha_0^2 y + 2c^4\alpha_0}{32\alpha_0^2 y^2 - 8c^2\alpha_0 y + c^4}.$$

Le dénominateur de x étant toujours positif, x sera positif ou négatif, suivant que y sera plus petit ou plus grand que $\frac{1}{4}\frac{c^2}{\alpha_0}$.

Si l'on fait $x = 2\alpha_0$, on trouve, pour déterminer y, l'équation

$$32\alpha_0^2 y^2 - 4c^2\alpha_0 y = 0, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{c^2}{8\alpha_0},$$

qui correspond au point de contact de l'hyperbole avec le périmètre de la région de convergence, et $y = 0$, qui signifie $\alpha' = -\beta'$, d'où $\alpha = \beta$, et, par suite, $\alpha = \alpha_0$.

Le point de rencontre du périmètre de la région de convergence avec l'axe des x est donc le point du lieu $xy = \frac{c^2}{4}$ dont les coordonnées sont

$$x = \alpha_0(1 + \sqrt{-1}),$$
$$y = \frac{c^2}{4\alpha_0}\frac{1 - \sqrt{-1}}{2};$$

il appartient à la conjuguée dont la caractéristique est $-\frac{c^2}{8\alpha_0^2}$.

L'équation du périmètre, résolue par rapport à y, donne

$$y = \frac{c^2(x - \alpha_0) \pm c^2\sqrt{-x^2 + 2\alpha_0 x + \alpha_0^2}}{8\alpha_0 x}$$

les racines de l'équation

$$x^2 - 2\alpha_0 x - \alpha_0^2 = 0$$

sont

$$x = \alpha_0 \pm \alpha_0\sqrt{2};$$

par conséquent, x ne peut varier qu'entre

$$-\alpha_0(\sqrt{2} - 1) \quad \text{et} \quad +\alpha_0(\sqrt{2} + 1);$$

les valeurs correspondantes de y sont

$$\frac{c^2}{8\alpha_0}(2 + \sqrt{2}) \quad \text{et} \quad \frac{c^2}{8\alpha_0}(2 - \sqrt{2}).$$

Supposons, pour prendre un exemple, $\alpha_0 = \frac{c}{2} = \frac{OC}{2}$: le point origine sera en A ; l'ordonnée du point de rencontre de la courbe avec l'axe des y sera $\frac{1}{4}\frac{c^2}{\alpha_0} = \frac{c}{2}$; ce point de rencontre sera en D ; la courbe passera aux points E et B, qui correspondent à $x = 2\alpha_0 = c$.

Les limites de x seront

$$-\frac{c}{2}(\sqrt{2} - 1) \quad \text{et} \quad +\frac{c}{2}(\sqrt{2} + 1),$$

ou

$$OA' \pm OA,$$

c'est-à-dire

$$-OG \quad \text{et} \quad +OH;$$

les valeurs correspondantes de y seront

$$\frac{c}{4}(2 + \sqrt{2}) \quad \text{et} \quad \frac{c}{4}(2 - \sqrt{2}),$$

ou

$$\frac{c}{2} \pm \frac{c}{2\sqrt{2}},$$

c'est-à-dire

$$OA' \pm \tfrac{1}{2}OA,$$

ce qui donnera les points J et I.

La courbe aura la forme

SJDEIBT.

Cette courbe est tout entière comprise entre l'hyperbole $xy = \frac{c^2}{4}$ et sa supplémentaire $xy = -\frac{c^2}{4}$. En effet, si l'on cherche les solutions communes à son équation

$$32\,\alpha_0^2 xy^2 - 8\,c^2\alpha_0(x-\alpha_0)\,y + c^4(x-2\alpha_0) = 0,$$

et à l'équation

$$xy = -\frac{c^2}{4},$$

on trouve, en remplaçant partout xy par $-\frac{c^2}{4}$,

$$-8\alpha_0^2c^2y + 2c^4\alpha_0 + 8c^2\alpha_0^2y + c^4x - 2c^4\alpha_0 = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0.$$

Le périmètre de la région de convergence étant obtenu, il reste à fixer le sens dans lequel cette courbe forme limite, ou à déterminer la région de convergence elle-même.

Pour cela, considérons une conjuguée de l'hyperbole donnée,

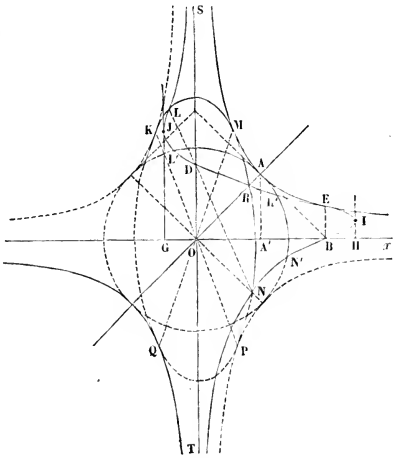


Fig. 16.

KLMRNPQ, qui touche la courbe réelle en M et Q, et l'enveloppe imaginaire des conjuguées en K et P, le point M étant d'ailleurs entre E et S.

Le tracé de cette courbe rencontre celui du périmètre de la région

de convergence en L, R et N, et il s'agit de savoir quelles sont les limites de l'arc de cette conjuguée qui se trouve dans la région de convergence ; car il ne suffit pas que les tracés de deux courbes imaginaires se coupent en un point pour que les coordonnées de ce point forment une solution commune aux équations des deux courbes, les valeurs réalisées de ces coordonnées pouvant très-bien se séparer différemment, sur les deux courbes, en parties réelles et imaginaires.

Or l'ordonnée du point M peut certainement être fournie par la série ; par conséquent, l'arc LR au moins est tout entier dans la région de convergence.

Mais la rencontre R n'est qu'apparente ; les coordonnées analytiques du point R de la conjuguée et du point R du périmètre de la région de convergence sont effectivement différentes ; car les équations

$$(\alpha' + \beta C\sqrt{-1})\,(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{c^2}{4},$$

et

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta^2 = \alpha_0^2,$$

où C désigne la caractéristique d'une conjuguée, n'admettent que deux solutions. En effet, la première se décompose en

$$\alpha\alpha' - \beta^2 C = \frac{c^2}{4}, \quad \text{et} \quad \alpha C + \alpha' = 0,$$

et la seconde se réduit à

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha_0\alpha = 0;$$

en éliminant α' entre les deux premières, il vient

$$-C(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{c^2}{4};$$

et, par suite,

$$\alpha = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha_0} = -\frac{c^2}{8C\alpha_0};$$

ce qui conduit pour β à deux valeurs égales et de signes contraires

$$\pm\sqrt{-\frac{c^2}{4C} - \frac{c^4}{64C^2\alpha_0^2}}, \quad \text{ou} \quad \pm\frac{c}{8C\alpha_0}\sqrt{16C\alpha_0^2 - c^2}.$$

Chaque conjuguée n'a donc sur le périmètre de la région de convergence que deux points d'ailleurs imaginaires conjugués, comme il était facile de le prévoir, le point origine étant réel.

Pour la conjuguée KLMNPQ, ces deux points sont L et N, situés sur une même parallèle au diamètre KP de contact avec l'enveloppe imaginaire des conjuguées.

L'arc de la conjuguée en question qui se trouve dans la région de convergence est donc LMN.

La rencontre R ne se présente sur la figure que parce que la partie SJDEAS de la région de convergence est, si l'on peut s'exprimer ainsi, redoublée, ou que les points qui y sont renfermés peuvent être donnés de deux manières différentes par l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \dots,$$

comme si une partie de la portion du plan qui forme la région de convergence avait été repliée sur elle-même et que la conjuguée dût être tracée sur la portion du plan non repliée; de sorte que sa rencontre avec la partie repliée du périmètre de la région de convergence ne serait qu'un effet de perspective.

Nous avons trouvé plus haut, pour les abscisses des points de rencontre de la conjuguée C avec le périmètre de la région de convergence,

$$-\frac{c^2}{8C\alpha_0} \pm \frac{c}{8C\alpha_0}\sqrt{-16C\alpha_0^2 - c^2};$$

pour qu'il y ait rencontre effective, il faut que

$$-16C\alpha_0^2 - c^2 > 0,$$

ou que

$$C < -\frac{c^2}{16\alpha_0^2}.$$

Or le dernier point de l'hyperbole réelle dont la série puisse donner l'ordonnée (c'est ici le point E) a pour abscisse $2\alpha_0$; le coefficient angulaire de la tangente en ce point, ou la caractéristique de la conjuguée qui y passe, est

$$-\frac{\frac{c^2}{8\alpha_0}}{2\alpha_0}, \quad \text{ou} \quad -\frac{c^2}{16\alpha_0^2};$$

les conjuguées qui ont des points dans l'intérieur de la région de convergence sont donc exclusivement celles qui touchent l'hyperbole réelle entre E et S.

Lorsque la caractéristique d'une conjuguée se rapproche de l'infini, cette conjuguée tend à s'aplatir suivant l'axe des y, et la branche de droite de cette conjuguée se trouve tout entière dans la région de convergence.

En résumé, la région de convergence se compose de la portion SJDEAS du plan, doublée, et de la portion DEIBTD simple.

On voit maintenant pourquoi on a trouvé la solution, en apparence étrangère, $x = 0$.

323. Considérons maintenant l'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2;$$

les points critiques sont

$$(x = +a,\ y = 0), \quad \text{et} \quad (x = -a,\ y = 0);$$

la courbe d'équilibre entre ces deux points est caractérisée par l'équation

$$(\alpha - a)^2 + \beta^2 = (\alpha + a)^2 + \beta^2,$$

qui se réduit à $\alpha = 0$; cette courbe est donc la conjuguée à ordonnées réelles de l'ellipse proposée, ou l'hyperbole SBS'TB'T'. Le point d'arrêt sera par conséquent en A ou en A', selon que la branche de conjuguée où se trouvera le point origine touchera l'ellipse en un point de l'arc BAB' ou en un point de l'arc BA'B'.

L'équation du périmètre de la région de convergence, en supposant, par exemple, que le point d'arrêt fût le point A, résulterait de l'élimination de α, β, α', β' entre les équations

$$\begin{gathered} a^2(\alpha'^2 - \beta'^2) + b^2(\alpha^2 - \beta^2) - a^2b^2 = 0, \\ a^2\alpha'\beta' + b^2\alpha\beta = 0, \\ (\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = (\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2, \\ \alpha + \beta = x \quad \text{et} \quad \alpha' + \beta' = y; \end{gathered}$$

elle serait donc du huitième degré. Mais, comme le point origine n'est plus ici déterminé par son abscisse seulement, l'équation trouvée fournirait à la fois les périmètres des régions de convergence relatives aux deux origines

$$x = x_0 \quad \text{et} \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}.$$

Il vaudra donc mieux construire la courbe cherchée sans recourir à son équation.

Supposons le point origine situé sur la conjuguée à abscisses réelles en un point Ω, de sorte que β_0 sera nul et que α_0 sera égal à $O\omega$.

La série pourra donner les ordonnées de tous les points des deux arcs ΩA et ΩC, en supposant $\omega c = \omega a$; mais elle ne pourra donner l'ordonnée d'aucun point de la courbe réelle; par conséquent le point $[x, y]$ restera toujours sur la branche supérieure de la demi-conjuguée à laquelle il appartiendra et β' restera toujours positif. Quant à β, qui est nul au point origine, il sera positif si le point $[x, y]$ appartient à une conjuguée tangente à l'ellipse en un point de la demi-ellipse inférieure, et négatif dans le cas contraire.

Déterminons d'abord les conjuguées que viendra seulement toucher le périmètre de la région de convergence et au delà desquelles, par conséquent, il ne faudra plus chercher de points de la courbe.

Les points de rencontre du périmètre avec la conjuguée C du lieu sont fournis par les équations

$$\begin{gathered} a^2\alpha'^2 + b^2\alpha^2 - (a^2C^2 + b^2)\beta^2 = a^2b^2, \\ a^2C\alpha' + b^2\alpha = 0, \end{gathered}$$

et

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta^2 = (a - \alpha_0)^2;$$

en éliminant α' entre les deux premières, on trouve

$$\left(\frac{b^4}{a^2C^2} + b^2\right)\alpha^2 - (a^2C^2 + b^2)\beta^2 = a^2b^2;$$

en éliminant β^2 entre celle-ci et la troisième il vient, réductions faites,

$$(b^2 + a^2C^2)^2\alpha^2 - 2a^2C^2\alpha_0\,(a^2C^2 + b^2)\,\alpha - a^6C^4 + 2a^5C^4\alpha_0 + 2a^3b^2C^2\alpha_0 - 2a^4b^2C^2 = 0;$$

pour que cette équation ait ses deux racines égales, il faut que

$$a\,(\alpha_0 - a)\,C^2 = 2b^2,$$

d'où

$$C = \pm\frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{a\,(\alpha_0 - a)}}.$$

Mais la solution doit se rapporter aussi bien à l'un qu'à l'autre des deux points

$$x_0 = \alpha_0, \quad y_0 = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha_0^2},$$

et

$$x_0 = \alpha_0, \quad y_0 = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha_0^2}.$$

On aurait donc dû trouver pour C quatre valeurs deux à deux égales et de signes contraires.

Cependant la solution $C = 0$, qui a été supprimée, n'était pas admissible, car en faisant $C = 0$ dans les équations primitives du problème elles deviennent

$$a^2\alpha'^2 + b^2\alpha^2 - b^2\beta^2 = a^2b^2,$$
$$b^2\alpha = 0$$

et

$$\beta^2 = a^2 - 2a\alpha_0.$$

qui donnent

$$\alpha = 0, \quad \beta = \pm\sqrt{a^2 - 2a\alpha_0},$$
$$\alpha' = \sqrt{\frac{2a^2b^2 - 2ab\alpha_0^2}{a^2}}, \quad \beta' = 0,$$

et, comme α_0 est plus grand que a, β et α' seraient imaginaires.

Il résulte de là que les deux valeurs de C trouvées plus haut sont bien les caractéristiques des conjuguées limites de celles que rencontre le périmètre de la région de convergence ; du reste ces deux conjuguées

limites ayant leurs caractéristiques égales et de signes contraires, cela explique comment elles conviennent aussi bien à l'un qu'à l'autre des deux points

$$x_0 = \alpha_0, \quad y_0 = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2},$$

pris pour origines ; seulement les points de contact de chaque conjuguée limite avec les périmètres des deux régions de convergence se trouvent sur les deux branches dans lesquelles cette conjuguée est séparée par son diamètre transverse.

Il n'y aura lieu de faire varier C qu'en dehors des deux valeurs qui viennent d'être obtenues, puisque la valeur initiale de la caractéristique est $\pm\infty$.

Déterminons maintenant les points de contact du périmètre de la région de convergence avec les deux conjuguées limites dont on vient de trouver les caractéristiques.

L'équation en α,

$$(b^2 + a^2C^2)^2\alpha^2 - 2a^2C^2\alpha_0(a^2C^2 + b^2)\alpha - a^6C^4 + 2a^5C^4\alpha_0 + 2a^3b^2C^2a_0 - 2a^4b^2C^2 = 0,$$

ayant ses deux racines égales, lorsqu'on donne à C l'une des valeurs trouvées, l'une d'elles est donnée par la formule

$$\frac{a^2C^2\alpha_0}{a^2C^2 + b^2}.$$

Cette valeur de α convient à la fois aux points de contact avec les deux conjuguées limites, puisque α ne dépend que de c^2.

α' sera fourni par l'équation

$$a^2C\alpha' + b^2\alpha = 0,$$

Enfin β le sera par

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta^2 = (a + \alpha_0)^2,$$

d'où

$$\beta^2 = 2\alpha_0(\alpha - a) - \alpha^2 + a^2.$$

D'ailleurs, nous savons que β' doit toujours rester positif; par conséquent, la valeur positive de β correspondra à la valeur positive de C, et la valeur négative de β à la valeur négative de C.

Si l'on voulait maintenant construire d'autres points de la courbe, rien ne serait plus aisé.

Les équations

$$(b^2 + a^2C^2)^2\alpha^2 - 2a^2C^2\alpha_0(a^2C^2 + b^2)\alpha - a^6C^4 + 2a^5C^4\alpha_0 + 2a^3b^2C^2\alpha_0 - 2a^4b^2C^2 = 0,$$

$$a^2C\alpha' + b^2\alpha = 0,$$

$$\beta^2 = 2\alpha_0(\alpha - a) - \alpha^2 + a^2 \quad \text{et} \quad \beta' = C\beta$$

donneraient successivement pour chaque valeur de C les valeurs de α, α', β et β'. β' devant toujours rester positif, β devrait être de même signe que C.

La tangente en A au périmètre de la région de convergence sera évidemment la tangente à l'ellipse, car, les points infiniment voisins de A appartenant à des conjuguées tangentes à l'ellipse en des points infiniment voisins de A, et ces points devant être, sur ces conjuguées, à des distances infiniment petites de leurs points de contact avec l'ellipse, les droites qui les joindront au point A seront infiniment peu inclinées sur la tangente en A à l'ellipse.

Il importe, pour construire la courbe, de savoir si elle présente un point de rebroussement en A, auquel cas elle aurait tous ses points au-dessus de l'axe des x; cherchons donc si elle peut couper l'une des x ailleurs qu'en A.

Si l'on fait $\alpha' = -\beta'$ dans les équations du problème, il vient

$$\alpha^2 - \beta^2 = a^2,$$
$$b^2\alpha\beta = a^2\alpha'^2.$$

et

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta^2 = (a - \alpha_0)^2.$$

En ajoutant la première et la troisième, on trouve

$$2\alpha^2 - 2\alpha_0\alpha - 2a^2 + 2a\alpha_0 = 0,$$

d'où

$$\alpha = \frac{\alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 - 4a\alpha_0 + 4a^2}}{2} = \frac{\alpha_0 \pm (\alpha_0 - 2a)}{2},$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \alpha_0 - a \quad \text{et} \quad \alpha = a.$$

$\alpha = a$ donne $\beta = 0$ et correspond au point A. Considérons dans la solution

$$\alpha = \alpha_0 - a,$$

elle donne

$$\beta = \pm\sqrt{\alpha_0(\alpha_0 - 2a)},$$

qui n'est admissible que dès que α_0 dépasse $2a$.

La figure a été faite en supposant $b = a$ et $\alpha_0 = \frac{3}{2}a$. Dans ces hypothèses, les valeurs extrêmes de C sont ± 2, auxquelles correspondent les conjuguées tangentes en D et en D', et la valeur commune des parties réelles des abscisses des points de contact avec le périmètre de la région de convergence est $\pm \frac{6}{5}a$, ce qui fournit les points E et E'.

Le périmètre de la région de convergence est

AE'CEA.

Les deux exemples que nous venons de discuter sont les plus simples qu'on pût trouver, et il est clair que, pour peu que l'équation du lieu considéré se compliquât un peu, la discussion du problème que nous

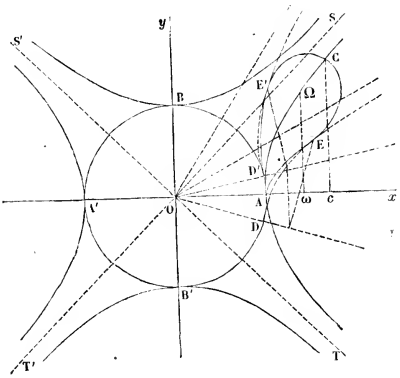


Fig. 17.

avions en vue présenterait des difficultés de détail bientôt inabordables, à cause de la longueur des calculs qu'exigerait la résolution des équations; mais la méthode resterait évidemment la même; or, nous n'avions d'autre but que de montrer que cette méthode peut bien réellement fournir la réponse à la question posée.

CHAPITRE XXVI

DE LA MARCHE DES VALEURS D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES.

324. La question que nous avons traitée dans les chapitres XX et XXI a été posée par M. Cauchy et traitée d'abord par M. Puiseux.

Après avoir résolu les questions qui se rapportent aux fonctions d'une seule variable, M. Cauchy a tenté d'appliquer ses méthodes à l'étude des fonctions de plusieurs variables.

Peut-être l'illustre maître n'a-t-il consacré que trop peu d'efforts à ces nouvelles recherches; peut-être a-t-il pensé que la manière dont il figurait la marche de la variable indépendante, en géométrie plane, ne conviendrait plus aux cas où la fonction dépendrait de deux ou d'un plus grand nombre de variables.

Quoi qu'il en soit, on n'a jusqu'ici rien proposé, dans l'École de M. Cauchy, relativement à l'étude de la marche d'une fonction implicite de plusieurs variables.

Cette question cependant ne présentera aucune difficulté nouvelle, la méthode que nous avons développée dans le chapitre XX s'y appliquera, sans presque subir de modifications, et le passage même sera assez facile.

La question, restreinte au cas des fonctions de deux variables indépendantes, peut être posée de trois manières différentes : nous commencerons par les distinguer.

Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation qui définit z implicitement. On pourra d'abord supposer que x et y partant des valeurs initiales x_0, y_0, z parte en même temps d'une de ses valeurs correspondantes, z_0, et demander ce que deviendra z, assujetti à la loi de continuité, lorsque x et y passeront d'une manière continue, de leurs valeurs initiales x_0, y_0, à des valeurs quelconques x_1, y_1, en suivant des chemins définis par *trois* équations entre leurs parties réelles et imaginaires.

Le second cas dont nous aurons à nous occuper sera celui où l'on ne donnerait plus que *deux* équations entre les quatre parties qui composent x et y.

Enfin nous supposerons que les parties réelles et imaginaires de x et de y ne soient plus liées entre elles que par une seule équation permanente.

Dans le premier cas, l'une seulement des six variables α, β, α', β', α'', β'' sera indépendante, et la question sera de trouver les valeurs finales des cinq autres.

Dans le second, si l'on attribuait une valeur arbitraire à l'une des variables indépendantes, ou, plus généralement, si l'on introduisait entre les six variables une relation complémentaire arbitrairement choisie, l'ensemble des solutions communes aux équations formulées représenterait une ligne; or cette ligne devant être en général composée de plusieurs branches, on pourra se proposer, connaissant les deux formes initiale et finale de la relation complémentaire et la loi suivant laquelle elle a passé de l'une à l'autre, de déterminer, sur le lieu final, la branche qui serait provenue d'une branche désignée du lieu initial, cette branche n'ayant pu se déplacer et se déformer que d'une manière continue.

Enfin, dans le troisième cas, si l'on introduisait entre les six variables une relation complémentaire arbitraire et variable de forme, les solutions communes aux équations considérées représenteraient une surface, composée en général de plusieurs nappes, et l'on pourra se proposer de déterminer, dans le lieu défini par l'équation complémentaire, arrivée à sa forme finale, la nappe qui serait provenue d'une nappe définie du lieu initial, par déplacement et déformation continus.

La question se décompose donc en trois autres bien distinctes.

Dans la première, le cas pratique sera celui où, des trois relations qu'on doit fournir entre les parties réelles et imaginaires de x et de y, deux seraient données par une équation entre x et y, la troisième $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ définissant le chemin que devrait suivre x.

Dans la seconde, pour s'écarter le moins possible de la réalité, il faudra de même donner, par une équation entre x et y, les deux conditions que devront remplir les parties réelles et imaginaires de ces deux variables.

Enfin dans la troisième, pour les mêmes motifs, nous examinerons principalement le cas où la relation qu'on devrait donner serait définie par une équation entre x et y, mais contenant une constante arbitraire réelle.

On eût pu chercher à ramener les trois questions à la dernière, qui comprend en effet les deux autres par sa plus grande généralité; mais ce seront au contraire les deux dernières que nous ramènerons à la première, parce qu'en effet, pour que la nappe considérée du lieu initial soit venue se confondre avec une nappe désignée du lieu final, dans la dernière question, il faudra que la branche, contenue sur la nappe initiale, d'un lieu curviligne défini par l'introduction d'une nouvelle équation, soit venue se superposer à la branche, contenue sur la nappe finale, du même lieu curviligne mobile; de même que la première branche ne sera venue se placer sur la seconde, qu'autant que les

points de l'une seront venus occuper la place des points de l'autre.

En sorte qu'en général les deux dernières questions pourront être considérées comme résolues lorsque la première le sera; avec cette restriction toutefois que, comme la nappe considérée du lieu initial, dans le dernier cas, ou la branche considérée, dans le second, pourraient se scinder à un certain moment et fournir dans le lieu final des nappes ou branches séparées, ou qu'il convînt de distinguer, il ne suffira pas, en général, d'avoir étudié le mouvement d'un seul point $[x, y, z]$, du lieu mobile, pour pouvoir conclure d'une manière certaine à l'égard des deux dernières questions.

De la marche des valeurs d'une fonction de deux variables imaginaires assujetties à trois conditions.

325. La question qui va nous occuper n'est pas seulement de l'ordre de celles que nous avons traitées dans le chapitre XX; car si deux des trois équations qui doivent régler la marche des variables indépendantes x et y, dont dépend la fonction z, étaient renfermées dans une équation entre x et y, l'autre ne contenant d'ailleurs que les parties réelle et imaginaire de x, par exemple, l'élimination préalable de y ferait même disparaître toute espèce de différence.

Cette élimination sera toujours permise et devra même être pratiquée dans tous les cas où elle sera possible; mais nous n'y recourrons pas dans nos explications générales.

Si la fonction z n'entrait qu'au second degré dans l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

qui la définit, elle s'exprimerait par

$$z = \mathrm{P} \pm \sqrt{\mathrm{Q}},$$

P et Q étant deux fonctions rationnelles de x et de y : l'évaluation de P ne pouvant donner lieu à aucune ambiguïté, ce serait, en conséquence, sur $z - \mathrm{P}$ que devrait porter la discussion.

Or les parties réelle et imaginaire de $z - \mathrm{P}$ ne pouvant changer de signes qu'en passant par zéro, ou par l'infini (on pourrait toujours, par une transformation de variables, écarter à l'avance, si on le voulait, le cas où z aurait à passer par des valeurs infinies), la valeur qu'aura dû prendre la fonction $z - \mathrm{P}$, assujettie à la loi de continuité, lorsque x et y auront passé d'une manière continue, par le chemin convenu, de leur état initial à leur état final, cette valeur sera toujours facile à assigner, lorsqu'on aura suivi les variations de signe d'une des parties de la fonction.

Si le chemin parcouru par le système des variables x et y est fermé, les deux valeurs de z s'échangeront entre elles, lorsque la partie qu'on

aura étudiée de z — P aura changé de signe un nombre impair de fois, tandis que, dans le cas contraire, chacune des valeurs de z reviendra à son état initial.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de la fonction z définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

qui donne

$$\frac{z}{c}=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}};$$

nous poserons comme toujours

$$x=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$
$$y=\alpha'+\beta'\sqrt{-1},$$
$$z=\alpha''+\beta''\sqrt{-1},$$

la condition de réalité de z étant

$$\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}=0 \quad \text{avec} \quad 1-\frac{\alpha^2-\beta^2}{a^2}-\frac{\alpha'^2-\beta'^2}{b^2}>0,$$

et celle qui en ferait disparaître la partie réelle étant

$$\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}=0 \quad \text{avec} \quad 1-\frac{\alpha^2-\beta^2}{a^2}-\frac{\alpha'^2-\beta'^2}{b^2}<0,$$

les points importants de la discussion porteront sur les passages de α, β, α', β' par des valeurs dont le système satisferait à la condition

$$\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}=0.$$

Or, celle des parties de z qui s'annulera en même temps que $\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}$ changera de signe avec cette quantité; en sorte que tout se réduira, à chaque passage, à savoir si $\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}$ aura ou non changé de signe en passant par zéro, ce qui sera toujours aisé puisque ayant entre α, β, α' et β' trois relations connues, qui pourront fournir $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ et $\frac{d\beta}{d\alpha}$ en fonction de α, β, α', β', on pourra connaître le sens dans lequel aura varié $\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}$.

La question analytique étant ainsi traitée, il nous reste à étudier le caractère concret de la condition

$$\frac{\alpha\beta}{a^2} + \frac{\alpha'\beta'}{b^2} = 0 :$$

elle exprime que le point $[x, y, z]$ passe sur une conjuguée dont les z sont réels, ou imaginaires sans parties réelles; mais ce point demande quelques éclaircissements.

Concevons par l'axe des z un plan mobile

$$y = mx,$$

ayant pour coefficient angulaire le rapport variable $\frac{\beta}{\beta'}$, prenons à chaque instant sa trace pour axe des x et, pour axe des y, le diamètre conjugué

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x$$

de la section horizontale.

z, dans cette transformation, ne changera pas; pour ne pas multiplier inutilement les notations, continuons de représenter par x et y les coordonnées horizontales de la surface : y sera maintenant constamment réel et x restera représenté par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$; x, y, z seront d'ailleurs liés entre eux par une nouvelle équation

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

dans laquelle a' et b' dépendront de m.

La condition de réalité de z sera maintenant

$$\alpha\beta = 0 \quad \text{avec} \quad 1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} > 0,$$

et la condition pour que z manque de partie réelle

$$\alpha\beta = 0 \quad \text{avec} \quad 1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} < 0,$$

ou, en décomposant : les conditions de réalité de z seront

$$\alpha = 0 \quad \text{avec} \quad 1 + \frac{\beta^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} > 0,$$

ou

$$\beta = 0 \quad \text{avec} \quad 1 - \frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} > 0;$$

et les conditions pour que z manque de partie réelle,

$$\alpha = 0 \quad \text{avec} \quad 1 + \frac{\beta^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} < 0,$$

ou

$$\beta = 0 \quad \text{avec} \quad 1 - \frac{\alpha^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} < 0.$$

Cela posé, le plan parallèle aux xz, mené à la distance y, coupera la surface suivant une ellipse réelle et toutes ses conjuguées hyperboliques, si y^2 est moindre que b'^2, et, dans le cas contraire, suivant des hyperboles imaginaires ayant pour enveloppe une ellipse imaginaire.

Or si nous supposons d'abord y^2 moindre que b'^2, quand α passera par zéro,

$$1 + \frac{\beta^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2}$$

sera nécessairement positif et le point $[x, z]$ se trouvera, dans le plan que nous supposons, sur l'hyperbole conjuguée dont les z sont réels, dont l'axe transverse, par conséquent, est parallèle aux z :

Et quand β passera par zéro, le point $[x, z]$ sera sur l'ellipse réelle, si

$$1 - \frac{\alpha^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2}$$

est positif, ou, dans le cas contraire, sur la conjuguée dont l'axe transverse est parallèle aux x.

En second lieu, si nous supposons y^2 plus grand que b'^2, quand α passera par zéro, le point $[x, z]$ se trouvera sur la conjuguée dont l'axe transverse est parallèle aux z, si

$$1 + \frac{\beta^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2}$$

est positif, et sur l'enveloppe imaginaire dans le cas contraire :

Et quand β passera par zéro,

$$1 - \frac{\alpha^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2}$$

étant nécessairement négatif, le point $[x, z]$ se trouvera sur la conjuguée dont l'axe transverse est parallèle aux x.

Cela posé, nous pouvons répéter ici les mêmes observations que nous avons présentées, dans le cas analogue, en géométrie plane.

Supposons que x et y reviennent à leur état primitif. Si α a passé par zéro, il aura dû changer de signe un nombre pair de fois ; à chaque fois la partie réelle aura changé de signe, par conséquent il n'y aura

pas d'effet produit dans la valeur de z ; mais si β a passé par zéro et changé de signe deux fois, l'une avec la circonstance

$$1-\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>0,$$

et l'autre avec la circonstance contraire, les parties imaginaire et réelle de z auront successivement changé de signe et les deux valeurs de z se seront permutées.

326. Si l'équation proposée contenait la fonction z à un degré supérieur au second, le calcul pourrait présenter des difficultés plus considérables ; mais la méthode serait encore pareille à celle que nous avons appliquée, en géométrie plane, au cas analogue.

On classerait toujours les conjuguées de la surface proposée en deux catégories, suivant que ces conjuguées toucheraient ou non la surface réelle.

Les conjuguées tangentes à la surface réelle se diviseraient en plusieurs classes, selon qu'elles toucheraient cette surface sur telle ou telle nappe.

Chaque conjuguée tangente à la surface réelle serait divisée en parties distinctes, par la courbe de contact.

Or le point $[x, y]$ ne pourrait passer d'une catégorie de conjuguées à l'autre, sans prendre son passage sur une conjuguée limite commune des deux catégories ; ces passages devraient être relevés avec soin.

Il ne pourrait non plus passer d'une classe de conjuguées d'une même catégorie à une autre classe, sans prendre passage sur une conjuguée limite commune des deux classes.

Enfin il ne pourrait passer d'une partie à une autre d'une conjuguée, sans passer sur la surface réelle.

Quant aux conjuguées non tangentes à la surface réelle, elles donneraient lieu à une discussion plus compliquée ; mais on pourra appliquer au cas où le point $[x, y, z]$ aurait passé sur ces conjuguées, une autre méthode d'ailleurs générale.

On pourra, en effet, si on le veut, comme nous l'avons fait pour étudier l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

faire suivre au plan des xz le mouvement du plan

$$y=\frac{\beta}{\beta'}x,$$

ce qui rendra y perpétuellement réel, et étudier la marche du point $[x, z]$ dans le plan mené parallèlement à celui des xz à une distance égale au nouvel y.

La question alors sera ramenée à une question de géométrie plane qui ne différerait de celle que nous avons traitée dans le chapitre XX qu'en ce que les équations données entre z et x contiendraient des variables intermédiaires et seraient, par suite, en plus grand nombre.

De la marche des valeurs d'une fonction de deux variables imaginaires assujetties à deux conditions.

327. Les solutions communes à l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

et à deux autres équations permanentes

$$F(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0, \qquad F_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

formeraient un système doublement indéterminé, auquel par conséquent correspondrait une surface. Mais si l'on joint à ces équations une condition mouvante

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

les solutions communes ne fourniront plus qu'une ligne courbe, pour chaque forme de l'équation φ. On pourra donc chercher à savoir comment une branche désignée de cette courbe se déplacera et se déformera, lorsque la fonction φ se déformera elle-même; on pourra, en particulier, demander ce qu'une branche désignée de la courbe primitive serait devenue en passant de l'équation $\varphi_0(\alpha, \beta) = 0$ à l'équation $\varphi_1(\alpha, \beta) = 0$.

Telle serait dans toute sa généralité la question que nous aurions à étudier dans ce paragraphe.

Comme nous la ramenons à savoir ce que sont devenus les points de la branche assignée de la courbe définie par les équations

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$F(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0, \qquad F_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$
$$\varphi_0(\alpha, \beta) = 0,$$

il nous suffira de montrer par un exemple comment cette réduction peut s'effectuer.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation qui lie la fonction z aux deux variables x et y;

$$\beta' = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y = \text{réel},$$

l'une des deux conditions que l'on devait fournir entre x et y ; enfin supposons que la seconde condition soit donnée par le système

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2, \\ r=\rho+\rho'\sqrt{-1}, \\ \rho^2+\rho'^2=ab; \end{cases}$$

et faisons passer ρ et ρ' par toutes les valeurs que prendraient successivement les coordonnées d'un mobile assujetti à décrire de droite à gauche la circonférence du cercle

$$y^2+x^2=ab,$$

et qui, partant du point situé sur la partie positive de l'axe des x, y reviendrait après un tour complet.

A chaque valeur de ρ, il correspondra une valeur de ρ, par suite une valeur de r ; les solutions communes aux deux équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \quad x^2+y^2=r^2$$

fourniraient une surface, mais la condition $y=$ réel réduira ce lieu à une ligne.

A l'origine du mouvement, c'est-à-dire lorsque ρ' était nul et ρ égal à $+\sqrt{ab}$, la ligne mobile sera composée d'une courbe d'entrée et d'une courbe de sortie ; à la fin du mouvement, la ligne mobile sera revenue occuper sa position initiale : la question sera donc de savoir quelles permutations auront pu se produire entre les branches de cette courbe, du commencement à la fin du mouvement.

Pour traiter cette question conformément au plan tracé dans les explications qui précèdent, il nous suffira, puisque y doit rester constamment réel, d'étudier le mouvement du point de rencontre de la ligne mobile avec un plan réel parallèle aux xz,

$$y=h,$$

car en faisant varier h, nous pourrons ensuite assigner la position finale d'un point quelconque de la ligne mobile.

L'équation

$$y^2+x^2=\left(\rho+\rho'\sqrt{-1}\right)^2$$

représente les cylindres parallèles aux z qui auraient pour traces sur le plan des xy les conjuguées du lieu

$$y^2+x^2=\left(\rho+\rho'\sqrt{-1}\right)^2$$

Ces conjuguées sont toutes égales entre elles; elles ont pour enveloppe imaginaire la circonférence du cercle

$$y^2 + x^2 = (\rho + \rho')^2,$$

mais celle dont les ordonnées sont réelles nous occupera seule.

Cette conjuguée touche l'enveloppe imaginaire aux extrémités du diamètre dirigé suivant l'axe des x et a pour asymptotes les bissectrices des angles des axes; elle se réduit soit à l'hyperbole équilatère qui a pour axe transverse l'axe des x, lorsque ρ s'annule, soit au cercle et à l'hyperbole équilatère, qui a pour axe transverse l'axe des y, lorsque c'est au contraire ρ' qui passe par zéro.

Le plan $y = h$ coupe le cylindre

$$y^2 + x^2 = \left(\rho + \rho'\sqrt{-1}\right)^2$$

suivant les génératrices partant des points d'intersection de la droite $y = h$ avec la conjuguée dont il vient d'être question.

Lorsque h est moindre que b, le plan $y = h$ coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse réelle dont la projection, en vraie grandeur, sur le plan des xz, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}$$

et toutes ses conjuguées.

Tandis que lorsque h est plus grand que b, l'intersection se compose des conjuguées de l'enveloppe imaginaire elliptique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = -\left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right).$$

Cela posé, déterminons d'abord la courbe fournie par le système des équations

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 = ab, \\ y = h, \end{cases}$$

dans lequel on ferait passer h par toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$.

Lorsque h varie entre $-\sqrt{ab}$ et $+\sqrt{ab}$, x reste réel; quant à z, il prend la valeur déterminée par l'équation

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{ab - y^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

ou

$$\frac{z^2}{c^2} = (a - b)\,\frac{ab^2 - (a + b)\,y^2}{a^2 b^2},$$

il est donc réel ou imaginaire, suivant que y^2 est moindre ou plus grand que $\frac{ab^2}{a+b}$, de sorte qu'entre les limites

$$-b\sqrt{\frac{a}{a+b}} < y < +b\sqrt{\frac{a}{a+b}},$$

le lieu est réel et appartient par conséquent à l'ellipsoïde.

Tandis qu'entre les limites

$$-b\sqrt{\frac{a}{a+b}} > y > -\sqrt{ab},$$

ou

$$+b\sqrt{\frac{a}{a+b}} < y < +\sqrt{ab},$$

le lieu est imaginaire ; mais ses x et y étant réels, il appartient à l'hyperboloïde à une nappe circonscrit à l'ellipsoïde le long de son contour apparent par rapport au plan des xy.

Enfin en dehors des limites $-\sqrt{ab}$ et $+\sqrt{ab}$, les y de la courbe sont réels, ses x sont imaginaires sans parties réelles, et quant à ses z, déterminés par l'équation

$$\frac{z^2}{c^2} = (a-b)\frac{ab^2-(a+b)y^2}{a^2b^2},$$

ils sont aussi imaginaires, sans parties réelles, puisque y^2 surpassant ab, à plus forte raison $ab^2 - (a+b)y^2$ est négatif; la courbe appartient donc à l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

qui du reste n'est pas une conjuguée de l'ellipsoïde.

Lorsque

$$y = \pm\sqrt{ab}, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{a}{b},$$

le point correspondant

$$x = 0, \quad y = \sqrt{ab}, \quad z = c\sqrt{\frac{a}{b} - 1}$$

appartient à la fois, comme cela devait être, aux deux hyperboloïdes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Cela posé, il ne nous reste qu'à donner successivement à h des valeurs comprises entre 0 et $+ b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$, entre $+ b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ et $+\sqrt{ab}$, enfin entre $+\sqrt{ab}$ et $+\infty$, et à examiner ce qui, dans chaque cas, aura dû se passer lorsque ρ et ρ' seront revenus à leurs valeurs initiales $+\sqrt{ab}$ et 0.

Supposons d'abord h compris entre 0 et $+ b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$, le point $[x, z]$ alors se déplacera sur les conjuguées de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2};$$

s'il était d'abord (c'est-à-dire lorsque ρ' était nul et ρ égal à $+\sqrt{ab}$) sur la nappe supérieure de l'ellipsoïde, ρ' devenant positif, l'équation

$$x\,dx = r\,dr,$$

où il faudrait faire x réel et positif, r égal à $+\sqrt{ab}$ et dr égal à $d\rho + d\rho'\sqrt{-1}$, $d\rho'$ étant positif, montre que la partie imaginaire de dx sera positive.

D'un autre côté, l'équation

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{z\,dz}{c^2} = 0,$$

où il faudrait faire z réel et positif, montre à son tour que la partie imaginaire de dz sera négative.

Le point $[x, z]$ se placera donc d'abord sur une branche inférieure de conjuguée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2},$$

il restera d'ailleurs du même côté du point de contact de l'ellipse avec la conjuguée où il pourra se transporter, jusqu'au moment où ρ' repassera par zéro, ρ ayant alors la valeur $-\sqrt{ab}$: car en vertu de l'équation

$$x^2 = (\rho + \rho'\sqrt{-1})^2 - h^2,$$

x ne peut être réel qu'autant que ρ' est nul.

Mais avant que ρ' redevînt nul, ρ lui-même aura passé par zéro, et ce passage doit attirer notre attention.

Au moment où ρ sera devenu nul, ρ' aura pris la valeur $+\sqrt{ab}$, et x aura l'une de celles que comprend la formule

$$\pm\sqrt{-1}\,\sqrt{h^2+ab}.$$

Mais comme la partie imaginaire de cette variable avait commencé par être positive et qu'elle n'a pas repassé par zéro, la seule valeur admissible sera

$$x=+\sqrt{-1}\,\sqrt{h^2+ab}.$$

Quant à z, il aura pris l'une des valeurs

$$\pm c\sqrt{1+\frac{h^2+ab}{a^2}-\frac{h^2}{b^2}},$$

qui sont réelles, car la condition

$$1+\frac{h^2+ab}{a^2}>\frac{h^2}{b^2}$$

revient à

$$ab^2>h^2(a-b),$$

et h^2 étant moindre que $\frac{ab^2}{a+b}$ est, à plus forte raison, inférieur à $\frac{ab^2}{a-b}$.

D'ailleurs la partie réelle de z étant d'abord positive et n'ayant pas encore passé par zéro, sera restée positive, de sorte que la valeur finale de z sera

$$z=+c\sqrt{1+\frac{h^2+ab}{a^2}-\frac{h^2}{b^2}};$$

le point $[x, z]$ se trouvera donc alors sur la partie de droite de la branche supérieure de la conjuguée $\frac{\beta''}{\beta}=0$.

La caractéristique changera de signe aussitôt après, car en vertu de l'équation

$$xdx=rdr$$

où il faudrait faire

$$x=+\sqrt{-1}\,\sqrt{h^2+ab},\quad r=+\sqrt{-1}\,\sqrt{ab},$$

et $d\rho'$ négatif, la partie imaginaire de dx sera négative.

Au moment donc où ρ' sera nul et où ρ prendra la valeur $-\sqrt{ab}$, le point $[x, z]$ devra se trouver sur le second quadrant de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}.$$

A partir de là, il changera de branche sur la conjuguée où il se transportera, car en vertu de l'équation

$$x dx = r dr$$

où x serait réel et négatif, r égal à $-\sqrt{ab}$, et où dr aurait sa partie imaginaire négative, la partie imaginaire de dx redeviendra négative, tandis que, par suite, celle de dz deviendra positive, pour que $\frac{\beta''}{\beta}$ reste négatif, comme cela doit être.

Le point $[x, z]$ restera maintenant sur une branche inférieure de la conjuguée, tant que ρ' ne repassera pas par zéro.

Il repassera sur la conjuguée $\frac{\beta''}{\beta} = 0$ au moment où ρ redeviendra nul et ρ' égal à $-\sqrt{ab}$; mais comme il n'aura pas pu passer sur la conjuguée $\frac{\beta''}{\beta} = \infty$, puisque x n'aura jamais pu prendre de valeurs réelles supérieures à a, les mêmes faits se reproduiront ensuite en sens inverse, de sorte que quand ρ et ρ' auront achevé leur évolution, le point $[x, z]$ reviendra à sa place primitive.

Ainsi, après l'évolution complète, chacune des parties supérieure ou inférieure de la section réelle du cylindre

$$x^2 + y^2 = r^2$$

et de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sera revenue occuper sa position primitive.

Faisons maintenant varier h entre $+ b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ et $+ b$:

$x = \sqrt{r^2 - h^2}$ sera encore, comme dans le cas précédent, réel, ou imaginaire sans partie réelle, lorsque ρ' ou ρ passeront par zéro, tandis que, dans tout autre cas, il se composera d'une partie réelle et d'une partie imaginaire.

Au départ, c'est-à-dire lorsque, ρ' étant nul, ρ aura la valeur $+\sqrt{ab}$, x sera réel et par exemple positif, et z imaginaire sans partie réelle. Le point $[x, z]$ se trouvera alors sur la conjuguée $\frac{\beta''}{\beta} = \infty$ de l'ellipse réelle

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2};$$

supposons qu'il appartienne à la branche supérieure de cette conju-

guée, ou que le point $[x, y, z]$ appartienne à la nappe supérieure de l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la valeur initiale de z étant ainsi positif : comme, au départ, la caractéristique du point $[x, z]$ se trouvait infinie, nous devons, avant tout, nous demander quel signe elle aura pris immédiatement après.

Or l'équation

$$x dx = r dr,$$

dans laquelle il faudrait faire

$$x = +\sqrt{ab - h^2}, \quad r = +\sqrt{ab} \quad \text{et} \quad dr = d\rho + d\rho'\sqrt{-1},$$

donne

$$d\beta\sqrt{ab - h^2} = d\rho'\sqrt{ab},$$

c'est-à-dire que $d\beta$ sera d'abord positif ; et comme β'' était déjà positif et avait une valeur finie, la caractéristique du point $[x, z]$ commencera par être positive.

Ainsi le point de contact, avec l'ellipse, de la conjuguée sur laquelle se transportera d'abord le point $[x, z]$, se trouvera dans le quatrième quadrant.

Au reste le point $[x, z]$ ne pourra jamais passer sur l'ellipse réelle

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2},$$

puisque toutes les fois que x reprendra l'une de ses valeurs réelles

$$\pm\sqrt{ab - h^2}$$

correspondant à $\rho' = 0$, z en même temps reprendra l'une de ses valeurs imaginaires sans partie réelle

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2} - \frac{ab - h^2}{a^2}},$$

il restera donc toujours sur la même branche de la conjuguée qui le contiendra, ou plutôt il suivra cette branche de conjuguée dans son évolution autour de l'ellipse.

Il ne s'agit donc que de savoir par quelles valeurs passera la caractéristique de cette conjuguée.

Lorsque ρ' atteindra la valeur $+\sqrt{ab}$ et que, par conséquent, ρ se trouvera nul, x aura l'une des valeurs

$$x = \pm\sqrt{h^2 + ab}\,\sqrt{-1};$$

mais comme la partie imaginaire de x a commencé par être positive et qu'elle ne s'est pas encore annulée, elle sera restée positive ; de sorte que la seule valeur admissible pour x sera

$$x = +\sqrt{h^2 + ab}\,\sqrt{-1}.$$

Quant à z, il aura l'une des valeurs

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2} + \frac{h^2 + ab}{b^2}},$$

qui sont réelles, car la condition

$$1 + \frac{h^2 + ab}{a^2} > \frac{h^2}{b^2}$$

revient à

$$ab^2 > h^2(a - b)$$

qui est satisfaite dans l'hypothèse où nous raisonnons, puisque h est moindre que b.

Mais la partie réelle de z, un peu après le départ, était négative, et elle n'est pas encore devenue nulle ; elle a donc dû rester négative, par conséquent la valeur de z doit être

$$z = -c\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2} + \frac{h^2 + ab}{a^2}};$$

le point $[x, z]$ se trouve donc alors sur la partie droite de la branche inférieure de la conjuguée $\frac{\beta''}{\beta} = 0$ de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Aussitôt après, la caractéristique du point mobile changera de signe ; en effet la différentielle de x sera déterminée par l'équation

$$x\,dx = r\,dr$$

ou

$$\sqrt{-1}\,\sqrt{h^2 + ab}\,(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,\sqrt{ab}\,(d\rho + d\rho'\sqrt{-1}),$$

c'est-à-dire

$$d\alpha\,\sqrt{h^2 + ab} = d\rho\,\sqrt{ab}$$

et

$$d\beta\sqrt{a^2+ab} = d\rho'\sqrt{ab},$$

tandis que celle de z le sera par l'équation

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{z\,dz}{c^2} = 0$$

ou

$$\frac{\sqrt{-1}\sqrt{h^2+ab}\,(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})}{a^2} - \frac{\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}+\frac{h^2+ab}{a^2}}}{c}(d\alpha'' + d\beta''\sqrt{-1}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\alpha\sqrt{h^2+ab}}{a^2} - \frac{d\beta''\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}+\frac{h^2+ab}{a^2}}}{c} = 0$$

et

$$\frac{d\beta\sqrt{a^2+ab}}{a^2} + \frac{d\alpha''\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}+\frac{h^2+ab}{a^2}}}{c} = 0.$$

Or $d\rho'$ ainsi que $d\rho$ étant négatifs, $d\alpha$, $d\beta$ et $d\beta''$ sont aussi négatifs, de de sorte que β qui était fini et positif, restant positif, la caractéristique devient négative, c'est-à-dire que le point $[x, z]$ se transporte sur la partie de droite de la branche de conjuguée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}$$

qui la touche dans le troisième quadrant.

Il en résulte que lorsque ρ' redeviendra nul, ρ ayant alors la valeur $-\sqrt{ab}$, le point $[x, z]$ viendra se placer sur la partie inférieure de la branche de gauche de la conjuguée $\frac{\beta''}{\beta} = 0$ de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Le mouvement se continuera ensuite évidemment dans le même sens : et lorsque ρ et ρ' seront revenus à leurs valeurs initiales, le point $[x, z]$ sera revenu aussi à sa position initiale.

Ainsi les deux portions supérieure et inférieure de la courbe que nous étudions, dans l'intervalle compris entre les plans

$$y = b\sqrt{\frac{a}{a+b}} \quad \text{et} \quad y = b,$$

après l'évolution complète, reprennent aussi leurs positions primitives.

Supposons enfin que h dépasse la limite b. Le point $[x, z]$, alors, se déplacera sur les conjuguées de l'ellipse imaginaire

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = -\left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right);$$

$x = \sqrt{r^2 - h^2}$ pourra ou non devenir réel, en même temps que r, selon que h^2 sera moindre que ab, ou plus grand. Selon le cas, le point $[x, z]$ pourra donc ou non passer sur la conjuguée $\frac{\beta''}{\beta} = \infty$ du lieu.

La discussion, au reste, dans chacun des deux cas $h^2 < ab$ et $h^2 > ab$, s'achèverait comme précédemment, et il est inutile que nous insistions davantage.

Nous avons, dans ce qui vient d'être dit, supposé toujours que ρ et ρ' achevassent complétement leur évolution, mais la discussion a été dirigée de telle manière, que si l'on voulait s'arrêter à des valeurs correspondantes quelconques de ρ et de ρ', on pût immédiatement assigner la place que serait venue occuper la branche mobile de la courbe considérée.

De la marche des valeurs d'une fonction de deux variables assujetties à une seule condition.

328. Il suffirait évidemment de supprimer, dans l'exemple précédent, la condition

$$\beta' = 0,$$

pour en former un qui se rapportât à la question présente.

Les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$
$$x^2 + y^2 = r^2,$$
$$r = \rho + \rho'\sqrt{-1},$$
$$\rho^2 + \rho'^2 = ab$$

détermineraient une surface variable de forme et de position avec la valeur de ρ; de sorte que la valeur initiale de ρ étant par exemple $+\sqrt{ab}$, il s'agirait de savoir ce qu'une nappe désignée de cette surface initiale serait devenue lorsque ρ et ρ' auraient achevé leur évolution.

Or la surface mobile contiendra toujours la courbe mobile dont nous avons étudié le mouvement dans le numéro précédent; on peut donc dire que la position finale de la nappe considérée de cette surface sera déterminée par la position finale de la branche correspondante de la courbe mobile.

CHAPITRE XXVII

DE LA CONVERGENCE DU DÉVELOPPEMENT, PAR LA FORMULE DE TAYLOR, D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES.

329. x_0 et y_0 désignant les valeurs initiales des deux variables indépendantes x et y, et z_0 celle de la fonction z, cette fonction est représentée jusqu'à un certain point par

$$z = z_0 + \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \dots$$
$$+ \left(\frac{dz}{dy}\right)_0 \frac{y - y_0}{1} + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)_0 \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{1.2} + \dots$$
$$+ \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)_0 \frac{(y - y_0)^2}{1.2} + \dots$$
$$+ \dots$$

Cette suite, comme étant indéfinie, constitue bien une série, si l'on prend le mot dans son acception la plus large, mais en réalité elle en fournira autant qu'on voudra imaginer de modes d'en grouper les termes; et non-seulement les conditions de convergence de toutes ces séries ne seraient pas identiques, mais même elles ne porteraient pas sur les mêmes groupes de coefficients différentiels.

Ainsi on pourrait regarder le développement comme représentant la somme des valeurs des séries formulées dans les diverses lignes horizontales; on pourrait grouper les termes suivant les lignes diagonales, etc.

Dans chaque cas, la condition de convergence dépendrait du mode de groupement des termes.

Il est donc indispensable de poser avant tout la question qu'on a en vue et de définir la série dont la convergence est mise en question.

Nous nous occuperons exclusivement de la série formée des sommes de termes homogènes, par rapport à $(x - x_0)$ et à $(y - y_0)$, dans le développement général.

Dans ce cas, qui est celui qu'on a effectivement à considérer dans la pratique, la question de la convergence du développement d'une fonction de deux variables se ramène presque immédiatement, comme on

va le voir, à celle de la convergence du développement d'une fonction d'une seule variable.

330. x_0 et y_0 étant toujours supposés connus, au lieu de nous donner x et y, c'est-à-dire $(x - x_0)$ et $(y - y_0)$, nous nous donnerons $(x - x_0)$ et $\frac{y - y_0}{x - x_0}$, ce qui reviendra au même.

La fonction z, alors, dépendra de x et du rapport $\frac{y - y_0}{x - x_0}$, que nous désignerons par k, de sorte que si l'équation, qui définissait d'abord z, était

$$f(x, y, z) = 0,$$

la nouvelle sera

$$f[x_0 + x - x_0, y_0 + k(x - x_0), z] = 0,$$

et nous développerons z suivant les puissances croissantes de $(x - x_0)$, par la formule de Maclaurin, comme une fonction d'une seule variable.

Le développement de z contiendra bien toujours deux variables x et k, mais nous nous bornerons, d'abord, à déterminer, pour chaque valeur de k, la limite que ne devrait pas dépasser le module de $(x - x_0)$, pour que la série restât convergente.

En procédant ainsi nous n'aurons pas seulement obtenu les réponses propres à toutes les questions que pourrait comporter l'étude de la série, dans tous les cas où les valeurs finales des deux variables indépendantes seraient données à l'avance : nous aurons encore établi des bases pour résoudre la question inverse, où il s'agirait de déterminer la relation d'inégalité à laquelle devraient satisfaire les modules de $(x - x_0)$ et de $(y - y_0)$ pour que la série restât convergente.

331. Le développement de z, ordonné suivant les puissances croissantes de $(x - x_0)$, est

$$z = z_0 + \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 \left|\begin{array}{l} \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0 \\ \qquad + 2k\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)_0 \\ \qquad + k^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)_0 \end{array}\right| \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ k\left(\frac{dz}{dy}\right)_0$$

Or, pour chaque valeur de k, la condition de convergence ne dépendra plus que de la nature du lieu

$$f[x, y_0 + k(x - x_0), z] = 0,$$

et de la place occupée sur ce lieu par le point $[x_0, z_0]$. La question sera

donc entièrement identique à celle que nous avons traitée dans les chapitres XXII, XXIII et XXIV.

332. Les points du lieu

$$f[x, y_0 + k(x - x_0), z] = 0$$

où le développement de z peut être arrêté, sont ceux où les tangentes sont parallèles à l'axe des z.

La dérivée de z par rapport à x en un point du lieu

$$f[x, y_0 + k(x - x_0), z] = 0$$

est

$$-\frac{\frac{df}{dx} + k\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}},$$

y désignant la variable $x_0 + k(x - x_0)$; les points critiques seront donc fournis par les équations

$$f'_z[x, y_0 + k(x - x_0), z] = 0$$

et

$$f[x, y_0 + k(x - x_0), z] = 0.$$

Ces points appartiennent à la courbe de contact de la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

avec le cylindre qui lui serait circonscrit parallèlement aux z, car cette courbe aurait pour équations

$$f'_z(x, y, z) = 0$$

et

$$f(x, y, z) = 0$$

où il suffirait de faire $y = y_0 + k(x - x_0)$ pour retrouver les précédentes.

Ainsi les points critiques du lieu

$$f[x_0, y_0 + k(x - x_0), z] = 0$$

sont les points d'intersection du plan réel ou imaginaire

$$y = y_0 + k(x - x_0)$$

avec la courbe de contact dont nous parlons.

Si la projection sur le plan des xy de cette courbe est représentée par

$$\varphi(x, y) = 0,$$

les abscisses des points critiques du lieu

$$f[x, y_0 + k(x - x_0), z] = 0$$

seront donc fournies par les équations

$$\varphi(x, y) = 0,$$
$$y = y_0 + k(x - x_0),$$

c'est-à-dire que les projections de ces points sur le plan des xy seront les intersections du contour apparent

$$\varphi(x, y) = 0$$

et de la droite

$$y = y_0 + k(x - x_0),$$

si, bien entendu, dans cet énoncé, par contour apparent de la surface on entend le contour apparent réel et toutes ses conjuguées.

333. La constante k marque la direction du chemin qui conduirait du point $[x_0, y_0]$ au point $[x, y]$, et il est évident que le module de la différence entre x_0 et l'abscisse du point critique où s'arrêtera le développement dépendra essentiellemeut de k; ainsi le module maximum de la différence $x - x_0$ et par suite celui de $y - y_0$, seront essentiellement variables et intimement liés à la valeur de k.

Cela est tellement vrai, que la direction k pourrait être telle, que les modules de

$$x - x_0 \quad \text{et de} \quad y - y_0$$

pussent devenir infinis sans que la série cessât de rester convergente.

Il suffirait en effet pour cela que la droite

$$y = y_0 + k(x - x_0)$$

coïncidât avec une asymptote réelle ou imaginaire du lieu

$$\varphi(x, y) = 0,$$

qui ne rencontrât celui-ci nulle part ailleurs qu'à l'infini.

En voici un exemple :

Soit l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

qui donne

$$\frac{z}{c} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}};$$

si

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{b}{a}\sqrt{-1},$$

et que l'on pose d'ailleurs

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{b}{a}\sqrt{-1},$$

le point mobile $[x, y]$ décrira une asymptote du contour apparent

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

de la surface, asymptote qui ne rencontrera ce contour nulle part ailleurs qu'à l'infini; z devra donc alors se développer en série convergente, quel que soit le module de $x - x_0$.

Et en effet, dans ce cas z ne sera qu'une constante c; toutes les sommes de termes homogènes du développement

$$z_0 + \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \dots$$
$$+ \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 (y - y_0) + \dots$$
$$+ \dots$$

seront donc nulles d'elles-mêmes; les modules de $(x - x_0)$ et de $(y - y_0)$ pourraient donc être infinis, que la série, définie comme nous l'avons définie, n'en resterait pas moins convergente.

On voit par là combien il était contraire à la réalité des choses de supposer, comme on l'a fait, avant tout examen, que les modules de $(x - x_0)$ et de $(y - y_0)$ fussent indépendants et eussent des maxima respectifs fixes.

334. On a dû reconnaître que ce qui précède se réfère à cette notion, prédominante en effet dans la question, et qu'il convient pour cette raison d'énoncer formellement, que dès que les valeurs finales de x et de y ont été choisies, le développement de $z - z_0$, ordonné suivant les puissances croissantes des deux variables $(x - x_0)$ et $(y - y_0)$, coïncide identiquement avec celui de la fonction de la seule variable $(x - x_0)$ qu'on obtiendrait en remplaçant, dans la valeur de $(z - z_0)$, $y - y_0$ par $k(x - x_0)$, k désignant le rapport des différences supposées données $y - y_0$ et $x - x_0$.

Ce rapprochement permet de donner une forme plus simple aux énoncés des propositions précédentes.

La relation entre z et x n'est autre que l'équation de la projection sur le plan des xz de la section de la surface $f(x, y, z) = 0$ par le plan $y - y_0 = k(x - x_0)$, de sorte que les points d'arrêt de la convergence ne peuvent être que les points critiques de cette projection.

Mais les points de la projection de la section où les tangentes à cette projection sont parallèles à l'axe des z, ne sont autre chose que les projections des points où la section a elle-même ses tangentes parallèles à l'axe des z, c'est-à-dire des points de rencontre du contour apparent de la surface, par rapport au plan des xy, avec le plan sécant.

Il en résulte que, pour chaque valeur de k, les systèmes de valeurs de x et de y où peut être limitée la convergence de la série sont les coordonnées x et y des points de rencontre du plan

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

avec le contour apparent de la surface par rapport au plan des xy.

Le point d'arrêt de la convergence, dans chaque plan

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

sera donc l'un de ces points de rencontre; et l'on déterminera ce point d'après les règles données pour les fonctions d'une seule variable.

Cela posé, la région de convergence, dans chaque plan, sera le lieu des points satisfaisant aux conditions

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

et

$$\text{Mod}(x - x_0) < \text{R},$$

R désignant le module de la différence entre x_0 et l'abscisse du point d'arrêt. Cette région sera bornée par une courbe qui en sera le périmètre et dont les points satisferont aux équations

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

et

$$\text{Mod}(x - x_0) = \text{R};$$

et si l'on suppose que k varie suivant une loi

$$k = m + \sqrt{-1}\,\varphi(m),$$

m désignant la tangente d'un angle qu'on fera varier de 0 à π, de façon que le plan sécant exécute une révolution complète, l'ensemble des

régions de convergence relatives à tous les plans constituera dans l'espace la région de convergence du développement de la fonction des deux variables $x - x_0$ et $y - y_0$ liées entre elles par la relation

$$y - y_0 = \{m + \sqrt{-1}\,\varphi(m)\}(x - x_0),$$

c'est-à-dire la région de convergence relative à la loi

$$k = m + \sqrt{-1}\,\varphi(m).$$

Cette région aura pour périphérie le lieu des périmètres des régions de convergence relatives à tous les plans sécants et pour limite le lieu des points d'arrêt dans tous ces plans, lieu qui sera l'une des branches de la courbe d'intersection du contour apparent de la surface par la série des plans considérés.

Si la loi de variation de k venait à changer, la région de convergence changerait aussi, naturellement.

335. Si la surface proposée présentait une ligne double, la section de cette surface par un quelconque des plans

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

aurait pour points doubles les points où la ligne double percerait ce plan.

Il n'y aurait pas lieu de tenir compte de cette ligne double si en chacun de ses points les deux plans tangents à la surface étaient distincts, car dans ce cas les tangentes à la section seraient elles-mêmes distinctes.

Mais si la ligne double était formée de la rencontre de deux nappes tangentes de la surface, les points doubles de la section seraient généralement des points de rebroussement et pourraient devenir points d'arrêt de la convergence.

CHAPITRE XXVIII

DES INTÉGRALES SIMPLES.

Des intégrales prises entre des limites imaginaires.

336. La définition d'une intégrale n'est pas encore complète lorsque l'on connaît la fonction explicite ou implicite placée sous le signe $\int$, et les valeurs limites de la variable et de la fonction. Il faut en outre savoir par quelles valeurs intermédiaires passent la variable et la fonction, pour aller de leurs limites inférieures à leurs limites supérieures. La valeur de l'intégrale peut changer avec le parcours.

Nous commencerons par assigner, pour chaque couple des limites, une des valeurs de l'intégrale, nous verrons ensuite quelles peuvent être les autres et comment l'intégrale les acquiert.

La théorie des aires des courbes imaginaires se lie d'une façon tellement intime à celle des intégrales étudiées sous le point de vue le plus général qu'elles comportent, lorsque, pour passer de la limite inférieure à la limite supérieure, on admet toutes les suites continues possibles de valeurs de la variable indépendante, que toutes les questions si ardues qu'embrasse la seconde théorie se trouvent réduites à un degré extrême de simplicité, lorsqu'on y adapte la méthode d'interprétation dont nous avons établi les bases dans la première partie de cet ouvrage.

On se borne habituellement, dans la notation d'une intégrale définie, à indiquer les limites entre lesquelles varie la variable indépendante; nous indiquons également les limites de la variable dépendante; l'intégrale ne sera pas encore par là complétement définie, mais elle ne pourra plus varier que de constantes indépendantes des limites.

Nous entendons par *limites de l'intégrale* les couples de valeurs de x et de y qui figurent les deux extrémités du chemin suivi par le point $[x, y]$.

Nous supposerons toujours, dans ce qui va suivre, les axes rectangulaires.

337. *Du cas où les limites sont réelles par rapport à x.* — Si les deux points limites appartiennent à la courbe réelle et qu'un arc continu

de cette courbe les réunisse, une des valeurs de l'intégrale $\int y dx$ sera la mesure de l'aire du segment correspondant à cet arc.

Si les deux limites appartiennent à la conjuguée $C = \infty$, et qu'un arc continu de cette courbe les réunisse, une des valeurs de l'intégrale sera la mesure de l'aire correspondant à cet arc; la partie réelle de cette valeur de l'intégrale sera l'aire du diamètre conjugué des cordes parallèles aux y de la conjuguée $C = \infty$, qui se trouvera comprise entre les limites de l'intégrale, par rapport à x, et la partie imaginaire sera l'aire comprise entre la conjuguée et son diamètre.

Si les deux limites appartiennent à la courbe réelle, mais qu'aucune branche de cette courbe ne les réunisse, les branches de la courbe réelle sur lesquelles elles se trouveront comprendront entre elles un anneau de la conjuguée $C = \infty$. Dans ce cas, entre autres valeurs, l'intégrale représentera la somme des mesures de l'aire correspondant à l'arc compris sur la courbe réelle entre la limite inférieure de l'intégrale et le point où la branche qui contient cette limite touchera la conjuguée $C = \infty$, de l'aire de la portion du diamètre conjugué des cordes parallèles aux y de la conjuguée $C = \infty$, comprise dans l'intérieur de l'anneau considéré, de l'aire correspondant à l'arc compris sur la courbe réelle entre le point où la branche qui contient la limite supérieure, touche la conjuguée $C = \infty$ et la limite supérieure, cette somme, augmentée ou diminuée de la moitié de l'aire intérieure imaginaire de l'anneau considéré, suivant que le point $[x,y]$, pour passer de l'une des limites à l'autre, aura décrit la partie supérieure ou la partie inférieure de cet anneau.

Les deux limites pourraient être séparées l'une de l'autre par plusieurs anneaux de la conjuguée et de la courbe réelle : dans ce cas l'intégrale, parmi d'autres valeurs, représenterait la somme des aires correspondant aux branches extrêmes et au diamètre commun des différents anneaux, comme dans le cas précédent, augmentée ou diminuée de la moitié de l'aire réelle ou imaginaire de chaque anneau de la courbe réelle ou de la conjuguée $C = \infty$.

Si les deux limites appartiennent à la conjuguée $C = \infty$, et qu'elles soient séparées par un ou plusieurs anneaux de la courbe réelle et de la conjuguée elle-même, ce cas s'analysera comme le précédent.

Enfin, si l'une des limites appartient à la courbe réelle et l'autre à la conjuguée $C = \infty$, l'intégrale représentera la somme des aires correspondant aux arcs de la courbe réelle et de la conjuguée, compris entre les limites et le point où les deux courbes se touchent. Dans le cas où les deux limites seraient séparées par quelques anneaux fermés de la conjuguée et de la courbe réelle, on tiendrait compte, comme dans les cas précédents, de la présence de ces anneaux.

338. *Du cas où l'une des limites appartient à la courbe réelle et l'autre à une conjuguée qui touche la courbe réelle.* — Ce cas se ramène aisément au précédent. Si l'on imagine que l'on ait rendu l'axe des y parallèle

aux cordes réelles de la conjuguée à laquelle appartient la limite imaginaire, la formule

$$\int_{x_0y_0}^{x_1y_1} y\,dx = \frac{y_1^2 - y_0^2}{2C} + \sin \mathrm{Y'X} \int_{x'_0y'_0}^{x'_1y'_1} y'\,dx,$$

établie dans le chapitre XV, montre qu'à la différence près de la partie algébrique $\frac{y_1^2 - y_0^2}{2\,C}$, l'intégrale aura pour valeur la somme des aires correspondant aux arcs de la courbe réelle et de sa conjuguée, qui se trouvent compris entre les limites et le point où les deux courbes se touchent, ces aires étant, bien entendu, limitées par des parallèles aux cordes réelles de la conjuguée considérée. Si les deux limites étaient séparées l'une de l'autre par quelques anneaux fermés de la conjuguée et de la courbe réelle, on tiendrait compte de cette circonstance comme dans les cas précédents.

339. *Du cas où les deux limites appartiennent à deux conjuguées différentes, qui touchent la courbe réelle.* — On formera, dans ce cas, une des valeurs de l'intégrale, en imaginant que le point mobile $[x, y]$ décrive successivement l'arc de la conjuguée à laquelle appartient la limite inférieure, compris entre cette limite et le point où la conjuguée qui la contient touche la courbe réelle, l'arc de la courbe réelle compris entre les points où elle touche les deux conjuguées, enfin l'arc de la seconde conjuguée compris entre le point où elle touche la courbe réelle et la limite supérieure.

$[x_0, y_0]$ et $[x_1, y_1]$ désignant toujours les limites de l'intégrale, si nous appelons $[a, b]$, $[a_1, b_1]$ les points où la courbe réelle touche les deux conjuguées : l'intégrale $\int_{x_0y_0}^{x_1y_1} y\,dx$ pourra se décomposer en

$$\int_{x_0y_0}^{ab} y\,dx + \int_{ab}^{a_1b_1} y\,dx + \int_{a_1b_1}^{x_1y_1} y\,dx;$$

cela posé, si nous rendons successivement l'axe des y parallèle aux cordes réelles des deux conjuguées, en désignant par x', y', x'', y'' les variables x et y transformées successivement dans les deux systèmes, par C_0 et C_1, les caractéristiques des deux conjuguées, l'intégrale $\int_{x_0y_0}^{ab} y\,dx$ pourra être remplacée par

$$\frac{b^2 - y_0^2}{2\,C_0} + \sin \mathrm{Y'X} \int_{x'_0y'_0}^{a'b'} y'\,dx',$$

et l'intégrale $\int_{a_1b_1}^{x_1y_1} y\,dx$ par

$$\frac{y_1^2 - b_1^2}{2C_1} + \sin \mathrm{Y''X} \int_{a''_1 b''_1}^{x''_1 y''_1} y'' dx'',$$

l'intégrale $\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y dx$ pourra donc être égalée à

$$+\frac{y_1^2}{2C_1} - \frac{y_0^2}{2C_0} + \sin \mathrm{Y'X} \int_{x'_0 y'_0}^{a'b'} y' dx' + \frac{b^2}{2C_0} + \int_{ab}^{a_1 b_1} y dx - \frac{b_1^2}{2C_1}$$
$$+ \sin \mathrm{Y''X} \int_{a''_1 b''_1}^{x''_1 y''_1} y' dx''.$$

Cette expression s'interprète aisément :

$$\frac{b^2}{2C_0} + \int_{ab}^{a_1 b_1} y dx - \frac{b_1^2}{2C_1}$$

représente l'aire comprise entre l'arc de la courbe réelle qui s'étend du point $[a, b]$ au point $[a_1, b_1]$, les tangentes à la courbe en ces deux points et l'axe des x; par conséquent l'expression entière, à la différence près de sa partie algébrique $\frac{y_1^2}{2C_1} - \frac{y_0^2}{2C_0}$, représente l'aire comprise entre l'axe des x, les cordes réelles des deux conjuguées menées l'une d'une des limites, l'autre de l'autre, et enfin l'arc composé qui joint ces deux limites.

340. *Du cas où les limites appartiennent à des conjuguées qui ne touchent pas la courbe réelle.* — Quand les deux limites appartiennent à une même conjuguée, et qu'un arc continu de cette courbe s'étend entre elles, l'interprétation de l'intégrale ne présente aucune difficulté.

L'identité

$$\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y dx = \frac{y_1^2 - y_0^2}{2C} + \sin \mathrm{Y'X} \int_{x'_0 y'_0}^{x'_1 y'_1} y' dx'$$

montre que l'intégrale fournit toujours, à la différence près de la quantité algébrique $\frac{y_1^2 - y_0^2}{2C}$, l'aire correspondant à l'arc de la conjuguée qui s'étend entre les deux limites de l'intégrale, cette aire étant comprise entre des parallèles aux cordes réelles de la conjuguée.

Lorsque les deux limites n'appartiennent pas à une même conjuguée, on peut imaginer que le point mobile $[x, y]$, pour passer d'une des limites à l'autre, ait suivi l'arc de la conjuguée à laquelle appartient la limite inférieure, jusqu'au point où cette conjuguée touche l'enveloppe

imaginaire, qu'il ait ensuite parcouru cette enveloppe, jusqu'au point où elle touche la conjuguée à laquelle appartient la limite supérieure, enfin qu'il ait suivi cette dernière conjuguée jusqu'au point correspondant à la limite supérieure de l'intégrale.

La première et la dernière partie de l'intégrale ainsi décomposée représentent des aires connues; quant à la partie intermédiaire, engendrée par le déplacement du point mobile le long de l'enveloppe, elle se liera de même très-simplement, comme on va le voir, à l'aire de cette enveloppe.

La méthode qui nous servira à obtenir une interprétation simple de l'intégrale $\int ydx$, prise le long d'un arc de l'enveloppe imaginaire, fournirait aussi bien l'expression géométrique de la même intégrale prise le long d'un parcours quelconque, mais le but que nous nous proposons étant de réduire autant que possible le nombre des parcours à considérer, nous n'aurons naturellement lieu d'appliquer cette méthode qu'à l'enveloppe imaginaire.

Soit A_0A_1 un arc quelconque formé des points correspondant à une suite continue mais arbitraire de solutions de l'équation du lieu $[y, x]$, et $A'_0A'_1$ l'arc dont tous les points auraient pour coordonnées les valeurs de x et de y, conjuguées de celles qui fournissent A_0A_1.

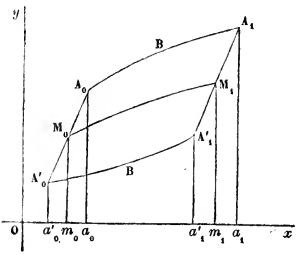


Fig. 18.

L'arc $A'_0A'_1$ fera ou non partie du lieu selon que l'équation de ce lieu aura ses coefficients réels ou en aura d'imaginaires. Dans le second cas, l'arc $A'_0A'_1$ appartiendrait au lieu représenté par l'équation conjuguée de la proposée; mais cette remarque n'a pas même d'importance dans la question, car si l'on a pu construire par points l'arc A_0A_1, on saura par là même construire l'arc $A'_0A'_1$.

Soit d'un autre côté M_0M_1 le lieu des milieux des cordes joignant les points de A_0A_1 aux points conjugués de $A'_0A'_1$: les coordonnées de A_0A_1 seront $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, celles de $A'_0A'_1$ seront $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha' - \beta\sqrt{-1}$; enfin celles de M_0M_1 seront α et α'.

Cela posé, l'intégrale $\int ydx$ prise le long de A_0A_1 serait

$$\Sigma\,(\alpha' + \beta'\sqrt{-1})\,(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})$$

ou

$$\Sigma\,(\alpha' d\alpha - \beta' d\beta) + \sqrt{-1}\,\Sigma\,(\alpha' d\beta + \beta' d\alpha);$$

mais si l'on représente par S_0, S' et S_1 les aires $a_0 A_0 A_1 a_1$, $a'_0 A'_0 A'_1 a'_1$ et $m_0 M_0 M_1 m_1$, on aura évidemment

$$S = \Sigma(\alpha' + \beta')(d\alpha + d\beta) = \Sigma(\alpha' d\alpha + \beta' d\beta) + \Sigma(\alpha' d\beta + \beta' d\alpha)$$
$$S' = \Sigma(\alpha' - \beta')(d\alpha - d\beta) = \Sigma(\alpha' d\alpha + \beta' d\beta) - \Sigma(\alpha' d\beta + \beta' d\alpha)$$

et

$$S_1 = \Sigma \alpha' d\alpha,$$

d'où l'on tire aisément

$$\Sigma(\alpha' d\alpha - \beta' d\beta) = -\frac{S+S'}{2} + 2S_1$$

et

$$\Sigma(\alpha' d\beta + \beta' d\alpha) = \frac{S-S'}{2}.$$

Il en résulte pour la valeur de l'intégrale prise de A_0 à A_1

$$\int_{A_0}^{A_1} y dx = I = 2S_1 - \frac{S+S'}{2} + \frac{S-S'}{2}\sqrt{-1}.$$

On trouverait de même pour l'intégrale prise de A'_0 à A'_1

$$\int_{A'_0}^{A'_1} = I' = 2S_1 - \frac{S+S'}{2} - \frac{S-S'}{2}\sqrt{-1}.$$

Cette formule pourrait suffire à l'institution complète de la théorie des intégrales simples et de leurs périodes, comme je l'ai montré dans le XLIV^e^ Cahier du *Journal de l'Ecole polytechnique*, mais il nous suffira ici de l'utiliser à l'interprétation de l'intégrale $\int y dx$ prise le long d'un arc de l'enveloppe imaginaire. On voit combien cette intégrale s'exprime simplement en fonction des aires de deux segments de cette enveloppe et de l'aire d'un segment du diamètre lieu des milieux de ses cordes réelles.

341. *Du cas où l'une des limites appartient à une conjuguée qui ne touche que la courbe réelle et où l'autre limite appartient à une conjuguée qui ne touche que l'enveloppe imaginaire.* — Il arrive quelquefois que les conjuguées dont les caractéristiques sont comprises entre certaines limites ne touchent que la courbe réelle, et que celles dont les caractéristiques ne sont pas comprises entre ces limites ne touchent que l'enveloppe imaginaire des conjuguées. Le lieu représenté par l'équation

$$y^3 - a^2 y + a^2 x = 0$$

en offre un exemple : les conjuguées dont les caractéristiques ne sont

pas comprises entre -1 et $+1$ ne touchent que la courbe réelle, tandis que les autres ne touchent que l'enveloppe imaginaire.

En pareil cas, l'intégrale ne peut plus être réduite à trois parties seulement, elle en contient forcément quatre, dont la première se rapporte à l'aire de la conjuguée à laquelle appartient la limite inférieure, correspondant à l'arc qui s'étend de cette limite au point de contact de cette conjuguée avec la courbe réelle; la seconde, à l'aire de la courbe réelle correspondant à l'arc qui s'étend du point de contact dont il vient d'être parlé au point de contact de la même branche de cette courbe réelle avec l'enveloppe imaginaire des conjuguées; la troisième, à l'intégrale prise le long de l'arc de l'enveloppe imaginaire qui s'étend du point de contact dont il vient d'être parlé en second lieu au point de contact de l'enveloppe imaginaire avec la conjuguée à laquelle appartient la limite supérieure; enfin la quatrième, à l'aire de cette conjuguée, correspondant à l'arc qui s'étend du dernier point de contact dont il vient d'être question au point correspondant à la limite supérieure.

342. *Du cas où la courbe réelle n'existe pas et où les limites appartiennent à des conjuguées qui ne touchent pas l'enveloppe imaginaire.* — Lorsque l'équation du lieu a quelques coefficients imaginaires, les conjuguées n'ont généralement pas d'enveloppe réelle. D'un autre côté, il est possible que les conjuguées qui touchent l'enveloppe imaginaire aient leurs caractéristiques comprises entre de certaines limites; on en a vu un exemple dans la discussion des conjuguées du cercle imaginaire. Il peut donc arriver que les conjuguées auxquelles appartiennent les deux limites ne puissent être réunies ni par l'enveloppe réelle, ni par l'enveloppe imaginaire. Mais alors l'enveloppe réelle est suppléée par quelques points isolés, par lesquels passent toutes les conjuguées et qui peuvent servir de lien entre elles. Dans ce cas, l'intégrale peut se trouver réduite à deux parties, dont l'une se rapporte à l'aire de la conjuguée à laquelle appartient la limite inférieure, correspondant à l'arc de cette conjuguée qui s'étend de cette limite inférieure à l'un des points isolés dont il vient d'être question, et l'autre à l'aire de la conjuguée à laquelle appartient la limite supérieure, correspondant à l'arc de cette conjuguée qui s'étend du même point isolé à la limite supérieure.

Mais il pourra aussi se faire que les deux branches de conjuguées qui passent par les deux limites ne contiennent pas un même point isolé, auquel cas il faudrait avoir recours à une troisième conjuguée, réunissant deux points isolés appartenant l'un à celle des branches de la première, qui passe par la limite inférieure; l'autre à celle des branches de la seconde, qui passe par la limite supérieure.

Quel que soit donc le cas que l'on examine, la méthode permettra toujours d'exprimer la valeur d'une intégrale $\int y dx$ au moyen des aires des segments de deux ou trois courbes définies.

343. *Séparation des m^2 valeurs d'une intégrale dont la dérivée est une*

racine d'une équation algébrique de degré m. — On définissait jusqu'ici une intégrale en donnant les valeurs extrêmes de la variable indépendante, lesquelles prenaient le nom de limites de l'intégrale. Quoiqu'une intégrale ne soit pas encore complétement définie lorsqu'on donne à la fois les limites par rapport à la variable indépendante et par rapport à la fonction placée sous le signe $\int$, nous avons cependant préféré ne donner le nom d'intégrales définies qu'aux intégrales prises entre des limites déterminées à la fois par rapport à la variable indépendante et par rapport à la fonction.

Lorsqu'on ne donne que les valeurs initiale et finale, x_0 et x_1, de la variable indépendante x, on peut associer à la limite inférieure x_0 chacune des m valeurs $y_{0,1}$, $y_{0,2}$,... $y_{0,m}$ de la fonction y, qui correspondent à x_0 et, de même, associer à la limite supérieure x_1, chacune des m valeurs $y_{1,1}$, $y_{1,2}$,... $y_{1,m}$, de la fonction, qui correspondent à la valeur x_1 de x.

Si l'on combine de toutes les manières possibles les limites inférieures et supérieures, on obtiendra m^2 intégrales distinctes. Ces m^2 valeurs de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx$$

ne restaient pas seulement confondues, ce qui n'aurait eu aucun inconvénient, si l'on avait pu assigner les m^2 valeurs de l'expression

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx,$$

mais il n'existait pas de méthode pour les distinguer et les obtenir séparément, sous forme finie, sous forme de séries, ou par approximation.

La méthode d'interprétation concrète des intégrales définies, exposée dans ce qui précède, lève entièrement la difficulté, ou plutôt la fait évanouir. Les m^2 valeurs de l'intégrale sont en effet les sommes des éléments de l'intégrale prise le long des m^2 arcs qui réunissent les m limites inférieures aux m limites supérieures, ces arcs étant formés des branches de conjuguées qui passent par les limites, terminées d'une part à ces limites et de l'autre aux points où elles touchent l'une ou l'autre enveloppe, et des branches de l'enveloppe réelle ou de l'enveloppe imaginaire qui relient les points de contact dont il vient d'être question, l'enveloppe réelle et l'enveloppe imaginaire pouvant d'ailleurs concourir ensemble ou séparément à réunir ces points de contact et devoir d'ailleurs dans certains cas être suppléespar des points isolés, qui en représenteraient des anneaux évanouissants.

344. *Intégration par approximation.* — Non-seulement on n'avait

jusqu'ici aucune méthode pour distinguer les unes des autres les m^2 valeurs d'une intégrale $\int_{x_0}^{x_1} y\,dx$, mais on n'en possédait non plus aucune pour calculer sûrement par approximation l'une de ces m^2 valeurs, par exemple,

$$\int_{x_0,\ y_0,\ n}^{x_1,\ y_1,\ p} y\,dx.$$

On avait bien, en effet, proposé dans ce but, de décomposer le chemin de $x = x_0$ à $x = x_1$ en parties assez petites pour que la série de Taylor restât convergente entre les extrémités de chaque partie, de façon à pouvoir appliquer de proche en proche la méthode d'intégration par série. Mais outre que ce procédé est loin d'être pratique, on ne donnait aucun moyen de faire les sections de manière qu'en partant de $y = y_{0,n}$ pour correspondre à $x = x_0$, on tombât précisément sur $y = y_{1,p}$ au moment où l'on serait arrivé à $x = x_1$; de sorte qu'en cherchant à obtenir

$$\int_{x_0,\ y_0,\ n}^{x_1,\ y_1,\ p} y\,dx,$$

on aurait eu $m - 1$ chances de tomber sur l'une des m autres valeurs de

$$\int_{x_0,\ y_0,\ n}^{x_1} y\,dx.$$

Au contraire, la méthode d'interprétation contenue dans ce qui précède supprime d'abord toute possibilité de confusion entre les m valeurs de

$$\int_{x_0,\ y_0,\ n}^{x_1} y\,dx,$$

mais fournit en outre le moyen immédiat d'appliquer au calcul de celle que l'on veut d'entre elles les méthodes de quadrature approchée. En effet, pour calculer les aires correspondant aux arcs de conjuguées qui passent par les limites assignées à l'intégrale, on peut les diviser par des ordonnées équidistantes, parallèles aux cordes réelles de ces conjuguées et appliquer alors l'une des formules de Simpson ou de Poncelet. Il suffit pour cela de calculer les parties réelles et imaginaires de ces ordonnées. D'un autre côté si une branche de la courbe réelle doit servir à réunir les deux branches de conjuguées qui passent par les limites, les mêmes formules sont directement applicables à la quadrature approchée du segment correspondant de cette courbe réelle. Enfin si une branche de l'enveloppe imaginaire des conjuguées doit réunir les deux branches de conjuguées qui passent par les limites, le théorème du n° 340 permettra d'appliquer les mêmes formules de

quadrature approchée à l'évaluation de l'intégrale $\int y dx$ prise le long de l'arc assigné de cette enveloppe.

345. *Intégration par série.* — Nous nous occuperons ici seulement des équations où n'entre pas la variable dépendante, qui, par conséquet, se présentent sous la forme

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ou plus généralement

$$f\left(x, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

L'intégration, par la série de Taylor, d'une équation de la forme

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

présentait des difficultés qui rendaient peu sûr l'emploi de cette méthode : et ce n'est pas de l'incertitude qui pesait encore sur la limite de la région de convergence que j'entends parler ici, car, en évitant tous les points critiques indistinctement, on pouvait du moins être certain que la série employée resterait convergente, en sorte qu'ayant développé $\frac{dy}{dx}$ et par suite, par intégration, y, de la limite inférieure x_0, numérique, à une limite variabe x_1, telle que le module de $(x_1 - x_0)$ ne dépassât pas une certaine quantité R_0, on pouvait attribuer à x_1 l'une des valeurs que cette variable pouvait prendre, développer de nouveau $\frac{dy}{dx}$, et par suite y, de la valeur numérique x_1 à une une nouvelle limite variable x_2, telle que le module de $(x_2 - x_1)$ ne dépassât pas une nouvelle quantité R_1, et ainsi de suite, ce qui eût fourni pour y une expression de la forme

$$\begin{aligned}
y = y_0 &+ \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x_1 - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x_1 - x_0)^2}{1.2} + \dots \\
&+ \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \frac{x_2 - x_1}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 \frac{(x_2 - x_1)^2}{1.2} + \dots \\
&+ \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 \frac{x_3 - x_2}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_2 \frac{(x_3 - x_2)^2}{1.2} + \dots \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ \left(\frac{dy}{dx}\right)_n \frac{x_{n+1} - x_n}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_n \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{1.2} + \dots,
\end{aligned}$$

puisque la constante introduite dans chaque nouvelle intégration, devait avoir pour valeur celle que l'intégration précédente avait donnée pour y.

Mais, en premier lieu, s'il eût fallu recourir à la sommation effective des suites précédentes, pour former la valeur initiale de $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, qui devait servir à composer la nouvelle suite qu'on eût voulu ajouter au développement, la longueur des calculs d'abord, mais surtout l'incertitude qui eût nécessairement pesé sur les résultats à obtenir, eussent fait renoncer à l'emploi de cette méthode.

En second lieu, et ce point a beaucoup plus d'importance, on n'eût pu, en tout cas, régler les étapes de x de manière à pouvoir répondre d'obtenir successivement ou séparément toutes ou chacune des m^2 valeurs de y dont les dérivées, au départ, représentées par les différentes racines de l'équation

$$f\left(x_0, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

seraient devenues, à l'arrivée, celles de l'équation

$$f\left(x_{n+1}, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

On eût bien pu, pour former la première suite, prendre successivement pour $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ toutes les racines de l'équation

$$f\left(x_0, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

et avancer de proche en proche vers x_{n+1} ; mais on manquait d'une règle qui permît de prévoir sur quelle valeur de $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{n+1}$ on tomberait à la fin du calcul. On pouvait bien recommencer en adoptant de nouvelles étapes pour x, mais on ne pouvait pas être assuré de ne pas retomber toujours sur les mêmes combinaisons ; enfin, si quelques nouveaux essais avaient successivement conduit à de nouvelles combinaisons, on n'avait pas de règle certaine pour parvenir à celles qui se seraient dérobées jusque-là.

Ces difficultés n'existent plus maintenant.

En premier lieu, quand on aura formé les p premières suites qui, conformément à la marche adoptée, devront fournir le développement de y, de x_0 à x_p, au lieu de calculer la valeur de $\left(\frac{dy}{dx}\right)_p$, qui doit concourir à la formation de la $(p+1)^{ième}$ suite, par la sommation directe de

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{x_1 - x_0}{1} + \left(\frac{d^3x}{dx^3}\right)_0 \frac{(x_1 - x_0)^2}{1.2} + \dots$$
$$+ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 \frac{x_2 - x_1}{1} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_1 \frac{(x^2 - x_1)^2}{1.2} + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{p-1} \frac{x_p - x_{p-1}}{1} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{p-1} \frac{(x_p - x_{p-1})^2}{1.2} + \dots,$$

on la tirera de l'équation

$$f\left(x_p, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

qui la fournira plus aisément et avec une approximation dont, au moins, on pourra répondre.

En second lieu, la méthode que nous avons donnée pour reconnaître parmi les racines de l'équation

$$f(x_p, y) = 0$$

celle que représente le développement de la fonction, de x_{p-1} à x_p, cette méthode est évidemment réciproque, c'est-à-dire qu'on pourra en renverser l'emploi et choisir x_p de manière que le point d'arrivée $[x_p, y_p]$ satisfasse à telle condition donnée qu'il pourrait remplir, qu'il se trouve, par exemple, sur une conjuguée désignée que rencontre la région de convergence.

On pourra ainsi, par étapes réglées à l'avance, amener le point $[x, y]$ du point $[x_0, y_0]$ à celui des points $[x_{n+1}, y]$ que l'on voudra.

En déterminant ainsi les m^2 chemins que x devrait suivre successivement pour que $\frac{dy}{dx}$ parvînt de chacune de ses m valeurs qui correspondent à x_0 à chacune de ses m valeurs qui correspondent à x_{n+1} (n est ici un nombre variable, mais x_{n+1} est la valeur finale de x), on obtiendra les m^2 intégrales de l'équation proposée ; x_{n+1} y représentera une variable assujettie à des conditions d'inégalité différentes dans des intégrales différentes.

La même méthode s'appliquerait évidemment à une équation différentielle d'ordre supérieur.

$$f\left(x, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

les m^2 intégrales de cette équation contiendraient comme constantes arbitraires y_0, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \dots, \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0$. Mais le calcul arithmétique des

valeurs de $\left(\frac{dy}{dx}\right)_p$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_p$,..., $\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_p$, $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_p$, nécessaire à la formation de la $p+1^{ième}$ suite, ne se ferait plus aussi simplement que dans le cas précédent.

$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_p$ serait bien toujours fourni par l'équation

$$f\left(x_p, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Mais $\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_p$,.. ., $\left(\frac{dy}{dx}\right)_p$ devraient être séparément calculés par la sommation directe des suites qui les représenteraient et qu'on aurait formées précédemment par intégrations répétées du développement de $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Prenons pour exemple l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - a^2\left(\frac{dy}{dx}\right) + a^2x = 0,$$

dont l'intégrale générale fournirait la quadrature de la courbe

$$z^3 - a^2z + a^2x = 0$$

et de ses conjuguées.

Si l'on voulait effectuer l'intégration entre des limites

$$x_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = z_0 \qquad \text{et} \qquad x_1, \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = z_1,$$

correspondant à des points du lieu

$$z^3 - a^2z + a^2x = 0$$

situés l'un sur une branche d'une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc LM (*fig.* 12) et l'autre sur une branche d'une conjuguée tangente à la branche L'N, ce qui serait le plus grand écart possible, on prendrait les points intermédiaires successifs sur des conjuguées dont les points de contact avec la courbe réelle marchassent dans le sens MLOL'N, en évitant, pour plus de simplicité, les conjuguées tangentes à l'enveloppe imaginaire, puisqu'il ne servirait à rien d'y passer d'abord, pour en sortir ensuite, ce qui, au reste, obligerait à passer par l'origine des coordonnées pour changer de demi-conjuguée.

Quand on serait près du point d'arrivée, on repasserait ou non une dernière fois sur la courbe réelle, suivant que l'avant-dernière station et la dernière seraient en des points situés de côtés différents ou du même côté, sur leurs conjuguées respectives, par rapport aux points de contact de ces conjuguées avec la courbe réelle.

CHAPITRE XXIX

THÉORÈME DE L'INDÉPENDANCE DE LA VALEUR D'UNE INTÉGRALE SIMPLE PAR RAPPORT A LA LOI DE PROGRESSION DE LA VARIABLE, LES LIMITES RESTANT LES MÊMES.

346. Nous avons, dans le chapitre précédent, indiqué, pour chaque système de valeurs de la variable et de la fonction, aux limites, la somme la plus simple d'aires définies qui pût constituer une valeur de l'intégrale. Il s'agit de montrer que toutes les autres se ramènent à celle-là, à des constantes près, et de fixer les conditions dans lesquelles l'intégrale peut varier, les limites restant les mêmes.

Nous commencerons par définir une valeur quelconque de l'intégrale.

Soient

$$f(x, y) = 0$$

l'équation qui définit une fonction y liée à la variable x;

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

deux valeurs de x et de y qui se correspondent et qui seront les valeurs initiales de x et de y;

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

une quelconque des valeurs qu'on attribuera à x;

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

une relation admettant la solution

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0$$

et destinée à régler la loi de progression suivie par x.

Lorsque α variera à partir de α_0, β variera à partir de β_0, et si l'interprétation de l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ pouvait donner lieu à quelque difficulté, ce qui arriverait par exemple si β prenait momentanément une valeur multiple, on supposera qu'on ait levé d'avance cette difficulté

en convenant à volonté de celle de ses valeurs que β devra prendre après avoir passé par sa valeur multiple.

La marche de x étant ainsi réglée, celle de y le sera par là même, si l'on suppose que cette fonction soit assujettie à varier d'une manière continue, à moins toutefois qu'elle ne passe par une valeur multiple, auquel cas on devrait de même lever préalablement la difficulté en convenant encore de celle de ses valeurs que y devrait prendre après avoir passé par sa valeur multiple.

La marche de y étant ainsi réglée, nous désignerons par $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ la valeur unique que prendra cette fonction pour chaque valeur de x.

Cela posé, si α_1 est la valeur finale que l'on veut attribuer à α, que l'on divise $\alpha_1 - \alpha_0$ en parties tendant toutes vers zéro, que l'on fasse croître successivement α de chacune de ces parties et que l'on conçoive la somme des produits de chaque valeur de y, correspondant à la dernière valeur qu'aura prise α, par l'accroissement total de x, correspondant au nouvel accroissement que devra prendre α, cette somme tendra vers une certaine limite qui sera l'une des valeurs de l'intégrale $\int y dx$ et que l'on pourrait obtenir au moyen de la formule du n° 340.

347. Si l'équation

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

venait à changer un peu, de sorte toutefois qu'elle continuât d'admettre les solutions $[\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0]$ et $[\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1]$, les courbes A_0A_1, $A'_0A'_1$ et M_0M_1 se déformeraient aussi un peu, et par suite S, S' et S_1 changeraient séparément de valeurs; mais, quant à l'intégrale $\int y dx$, ou

$$2S_1 - \frac{1}{2}(S + S') + \frac{1}{2}(S - S')\sqrt{-1},$$

elle conserverait rigoureusement la même valeur, à moins de circonstances particulières, que l'étude de la question va faire connaître.

Le fait serait évident si l'on savait d'avance qu'il existât une fonction Y ayant pour dérivée la fonction y, parce que l'intégrale cherchée serait une des valeurs de cette fonction Y, pour $x = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}$, et que cette valeur ne dépendrait pas des valeurs intermédiaires de α et de β, si du moins ces valeurs n'avaient changé qu'assez peu pour que Y n'eût pas pu prendre des valeurs égales dans l'intervalle; mais la fonction Y, quoiqu'on puisse toujours en concevoir l'existence, est quelquefois complétement indéterminée, pour toute valeur de x, à moins que l'on ne tienne compte de la succession des valeurs que l'on a données à cette variable, de sorte qu'on ne peut pas s'appuyer sur l'existence de la fonction Y pour en conclure l'indépendance, dans de certaines limites, de la valeur de l'intégrale $\int y dx$, par rapport à la loi de progression de x.

Il y aura, au contraire, avantage à établir directement cette indépendance, parce que s'il est constaté que

$$\int_{\alpha_0+\beta_0\sqrt{-1}}^{\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}} y\,dx$$

ne dépend que de $\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}$, pourvu que les valeurs intermédiaires de α et de β soient restées circonscrites dans de certaines limites, il en résultera, sinon la notion de la fonction indéfinie Y, dans le cas où elle serait réellement indéterminée, du moins celle de cette fonction considérée à un point de vue assez restreint pour qu'elle ne pût au contraire acquérir qu'une seule valeur pour chaque valeur de la variable.

La démonstration suivante, fondée uniquement sur les principes élémentaires du Calcul différentiel, a tous les avantages que l'on peut souhaiter.

Tout se réduit évidemment à faire voir que, pour former les éléments successifs de l'intégrale, on pourra faire varier séparément et successivement la partie réelle et la partie imaginaire de x, au lieu de les faire varier ensemble, et intervertir l'ordre de deux variations consécutives; car, s'il en est ainsi, on pourra déformer insensiblement la relation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, et l'amener de proche en proche à ce que l'on voudra, en reportant, par exemple, d'abord chaque $d\alpha$ sur le dx précédent, puis chaque nouveau $d\alpha$ sur le nouveau dx précédent, et ainsi de suite.

Or les deux propositions qui viennent d'être énoncées se traduisent par les égalités

$$\begin{aligned}
&\mathrm{F}\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)\left(d\alpha+d\beta\sqrt{-1}\right)\\
&\quad=\mathrm{F}\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)d\alpha+\mathrm{F}\left[(\alpha+d\alpha)+\beta\sqrt{-1}\right]d\beta\sqrt{-1}\\
&\quad=\mathrm{F}\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)d\beta\sqrt{-1}+\mathrm{F}\left[\alpha+(\beta+d\beta)\sqrt{-1}\right]d\alpha,
\end{aligned}$$

qui sont évidemment justes, mais à la condition toutefois que

$$\mathrm{F}\left[(\alpha+d\alpha)+\beta\sqrt{-1}\right] \quad \text{et} \quad \mathrm{F}\left[\alpha+(\beta+d\beta)\sqrt{-1}\right]$$

ne diffèrent de

$$\mathrm{F}\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)$$

que de quantités infiniment petites, c'est-à-dire que

$$\mathrm{F}\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right) \quad \text{ni} \quad \mathrm{F}'\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)$$

ne soient pas infinies; ni, du reste, les dérivées suivantes de $\mathrm{F}(x)$; car, s'il en était autrement, on ne pourrait pas répéter la même démonstration pour un nouveau changement d'ordre; à condition même que

$$F(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

ne soit pas une valeur multiple de y, dont les dérivées se séparent à partir d'un certain ordre sans devenir infinies, car, dans ce dernier cas, la marche ultérieure de la fonction pourrait être changée.

On peut donc poser en principe que l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ restant toujours satisfaite par $\alpha = \alpha_0$, avec $\beta = \beta_0$, et par $\alpha = \alpha_1$, avec $\beta = \beta_1$, et y partant d'ailleurs toujours de la même valeur initiale $y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$, l'intégrale $\int_{\alpha_0+\beta_0\sqrt{-1}}^{\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}} y\,dx$ conservera la même valeur, quelque modification que l'on fasse subir à l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, pourvu que dans ses formes successives elle n'admette jamais une solution $\alpha = a_1$, $\beta = b_1$, à laquelle correspondrait une valeur infinie ou multiple de y, valeur que cette fonction devrait d'ailleurs atteindre au moment où x atteindrait la valeur $a_1 + b_1\sqrt{-1}$; car si, en raison de sa valeur initiale et de la continuité à laquelle elle serait restée astreinte, la fonction y devait alors prendre une des valeurs finies et non multiples qui correspondent à $x = a_1 + b_1\sqrt{-1}$, il est clair que la démonstration s'appliquerait encore (1), comme je l'ai fait remarquer en 1839 dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

---

(1) Je crois devoir observer ici que, si j'admets au nombre des systèmes de valeurs de α et de β que ne doit pas comporter l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, dans ses modifications continues, celles auxquelles il correspondrait pour y des valeurs multiples dont les dérivées se séparassent à partir d'un certain ordre, sans devenir infinies, c'est parce que l'intégrale $\int y\,dx$ n'a été définie en quelque sorte que physiquement, et que d'ailleurs la fonction intégrale Y ne pourrait généralement pas être conçue comme fonction analytique.

Car, lorsque cette fonction Y pourra être formulée, elle ne devra pas être considérée comme pouvant acquérir plusieurs valeurs différentes au delà d'un point où y aurait pris des valeurs égales, parce que la condition de continuité ne consiste pas seulement en ce qu'une fonction ne saute pas brusquement d'une de ses valeurs à une autre, correspondant à la même valeur de la variable, mais encore en ce que les dérivées de tous les ordres de cette fonction varient également d'une manière continue.

Pour s'en assurer, il suffit de définir analytiquement, sinon la fonction intégrale indéfinie Y, du moins le segment le plus étendu de cette fonction que l'on puisse concevoir nettement et de recourir, pour cela, à son développement en série. On peut toujours concevoir la fonction Y comme définie, dans les limites où la série reste convergente, par l'intégrale

$$y_0(x - x_0) + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots$$

de la fonction

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x-x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2} + \dots,$$

qui représenterait dans les mêmes limites (car les deux séries seront en même temps convergentes ou divergentes) le segment correspondant de la fonction y.

348. *Nouvelle expression des conditions que doit remplir un parcours fermé pour que l'intégrale correspondant à ce parcours ne soit pas nulle.* — Les analystes n'avaient pas imaginé, avant Cauchy, qu'une intégrale prise entre des limites identiques pût être différente de zéro. On regardait, par habitude, la nullité de l'intégrale comme allant de soi : au contraire, les idées s'étant élargies, c'est presque l'ancienne opinion qui devient singulière; aujourd'hui, c'est la nullité de l'intégrale qui a besoin d'être établie quand il y a lieu.

D'après ce qu'on vient de voir dans le numéro précédent, pour que l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} y\,dx$, relative à un parcours fermé $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, soit identiquement nulle, il suffit que la suite des valeurs de x, déterminée par l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, puisse se réduire, par des déformations continues, à la valeur unique x_0, sans que l'équation variable $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ ait admis une seule fois pour solution le système des parties réelle et imaginaire d'une valeur $a_1 + b_1\sqrt{-1}$ de x, à laquelle correspondrait une valeur infinie ou multiple de y, valeur que cette fonction devrait d'ailleurs acquérir alors.

Le théorème de Cauchy est incontestable; mais la démonstration de l'illustre analyste l'établit sans l'expliquer, et, comme la question est à la fois très-importante et très-délicate, je crois devoir donner du fait l'explication suivante qui, non-seulement, dissipera tous les doutes, mais encore fera porter, comme cela devait être, sur le parcours $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ lui-même, les conditions qu'il doit remplir, au lieu de les laisser porter sur une relation d'extranéité entre la suite de solutions fournies par l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ et un système de valeurs de α et de β auquel corresponde une valeur singulière de y.

Pour se rendre nettement compte des faits, il suffit de ramener la question au point où on la considérait autrefois, quand on n'attribuait aux variables que des valeurs réelles, et, pour cela, il n'y a qu'à obser-

---

Or la fonction

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \dots$$

n'étant affectée d'aucune indétermination, lorsque la fonction y définie par l'équation

$$f(x, y) = 0$$

prend des valeurs égales, auxquelles correspondent des valeurs différentes de ses dérivées d'ordres assez élevés, il en sera de même de la fonction intégrale

$$y_0(x - x_0) + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots.$$

C'est, je le répète, de la somme des éléments $y\,dx$, définie comme elle a pu l'être, et non de l'intégrale Y, en cas qu'elle existe, que l'on peut dire qu'elle pourrait prendre des valeurs distinctes à partir du moment où la fonction y aurait pris une valeur multiple dont la substitution ne rendît infinie aucune dérivée de cette fonction y.

ver que la condition introduite $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, jointe aux deux équations dans lesquelles se décompose

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0,$$

ne laisse plus subsister que l'indépendance d'une seule des variables α, β, α' et β', de sorte que, dès l'introduction de cette condition, chacune des quatre variables devient une fonction déterminée de celle que l'on veut des trois autres.

L'intégrale se compose de quatre parties

$$\Sigma\alpha' d\alpha, \quad -\Sigma\beta' d\beta, \quad \sqrt{-1}\,\Sigma\alpha' d\beta \quad \text{et} \quad \sqrt{-1}\,\Sigma\beta' d\alpha,$$

dont chacune, abstraction faite du signe qui l'affecte, est, d'après ce qui vient d'être dit, une intégrale d'une différentielle dépendant d'une variable réelle, puisque dans chacune on peut considérer le facteur fini, placé sous le signe Σ, comme une fonction de la variable dont le facteur infiniment petit est la différentielle.

Dès lors il est évident que chacune des parties de l'intégrale sera identiquement nulle si, dans les limites où varie la variable indépendante, α ou β, la fonction α' ou β' n'a pu passer par une valeur multiple : absolument par la même raison que, par exemple, l'intégrale $\int y dx$ prise le long de la circonférence du cercle

$$x^2 + y^2 = R^2$$

repasse nécessairement par zéro chaque fois que la limite supérieure revient se confondre avec la limite inférieure, lorsque x est resté compris entre $+R$ et $-R$, sans avoir pu atteindre ces valeurs, parce qu'alors le point $[x, y]$ n'a pu se mouvoir que sur l'une des demi-circonférences séparées par l'axe des x.

On comprend donc parfaitement que si les valeurs initiales x_0, y_0 de x et de y ne présentent elles-mêmes rien de particulier, et que les limites assignées à α et à β par la condition $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ soient assez peu étendues, les quatre parties de l'intégrale devront être séparément nulles, les points dont les coordonnées seraient α et α', β et α', α et β' ou β et β', parcourant alors les mêmes arcs en sens contraires lorsque α et β croissent d'abord de leurs limites inférieures à leurs limites supérieures, et repassent ensuite par les mêmes valeurs, en revenant de leurs limites supérieures à leurs limites inférieures.

D'ailleurs la condition $\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \infty$, par exemple, jointe aux deux équations dans lesquelles se décompose

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0,$$

ferait elle-même de β une fonction de α, déterminée par une équation telle que $\psi(\alpha, \beta) = 0$.

De sorte que si les deux équations

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(\alpha, \beta) = 0$$

n'avaient pas de solutions communes, on serait assuré que $\Sigma\alpha' d\alpha$ serait identiquement nul. Les autres parties de l'intégrale $\Sigma\beta' d\beta$, $\Sigma\alpha' d\beta$ et $\Sigma\beta' d\alpha$ donneraient évidemment lieu à des observations analogues.

Ainsi, en général, quand l'intégrale est nulle, les quatre parties qui la composent sont séparément nulles, et l'on peut d'ailleurs assigner pour chacune d'elles une condition sous laquelle elle sera certainement nulle.

On peut encore remarquer que les systèmes de valeurs de α et de β pour lesquels $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$, $\frac{d\beta'}{d\alpha}$, $\frac{d\alpha'}{d\beta}$ et $\frac{d\beta'}{d\beta}$ sont infinis, forment des suites continues admettant pour solutions communes les systèmes de valeurs de α et de β pour lesquels $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire

$$\frac{d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}}{d\alpha + d\beta\sqrt{-1}},$$

est infini.

Cette remarque explique pourquoi les solutions des deux équations

$$f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad f'_y(x, y) = 0$$

ont pu prendre une si grande importance apparente dans la théorie ; mais on voit en même temps que rien dans les faits ne pouvait investir ces solutions d'une prépondérance exclusive telle que toute la théorie dût nécessairement rouler sur leur intervention. Au contraire, il eût été plus naturel de rattacher la non-réduction à zéro de l'intégrale à des conditions différentes

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \infty, \quad \frac{d\alpha'}{d\beta} = \infty, \quad \frac{d\beta'}{d\alpha} = \infty \quad \text{et} \quad \frac{d\beta'}{d\beta} = \infty,$$

remplies successivement et séparément en divers points du parcours, qu'à la condition $\frac{dy}{dx} = \infty$, qui les comprend bien toutes quatre, mais à laquelle ne satisfait aucun des systèmes de valeurs attribuées à x et à y, en raison du parcours.

CHAPITRE XXX

DES PÉRIODES DES INTÉGRALES SIMPLES

Du cas où l'équation qui définit la fonction placée sous le signe sommatoire a ses coefficients réels.

349. *Des périodes engendrées dans le parcours de la courbe réelle.* — L'expression analytique de l'aire d'une courbe fermée prise entre deux limites quelconques, ne peut être que le terme général d'une progression par différence, ayant pour raison l'aire de la surface totale comprise dans l'intérieur de cette courbe fermée; car au chemin qui conduit le plus directement d'un point de cette courbe à un autre, on peut toujours ajouter un nombre quelconque de tours entiers faits sur sa circonférence, et chaque tour fait ajoute à l'intégrale l'aire de la surface intérieure.

En effet, l'ordonnée étant $y = \varphi(x) \pm \psi(x)$, l'intégrale prise en faisant le tour de la circonférence est, si a et b sont les valeurs limites de x,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx + \int_b^a \varphi(x)\,dx + \int_b^a -\psi(x)\,dx$$

ou

$$2\int_a^b \psi(x)\,dx,$$

c'est-à-dire deux fois l'aire de la surface comprise entre la courbe et son diamètre, ou l'aire même de cette courbe.

Ainsi, $\int dx\sqrt{R^2 - x^2}$ doit avoir pour période l'aire du cercle $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ou πR^2, et, en effet,

$$\int dx\sqrt{R^2 - x^2} = \frac{x\sqrt{R^2 - x^2}}{2} + \frac{1}{2}R^2 \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{R},$$

dont la période est πR^2.

L'aire indéfinie d'une courbe composée d'anneaux fermés aura de même pour périodes les aires des surfaces des différents anneaux.

Cette explication de l'existence des périodes réelles, dans les cas où

la différentielle placée sous le signe d'intégration est celle de l'aire d'une courbe fermée, était de nature à se présenter d'elle-même à tous les esprits un peu droits.

350. *Des périodes engendrées dans le parcours des conjuguées.* — La théorie des aires des conjuguées fournira, dans des termes analogues et aussi simples, l'explication des périodes imaginaires des intégrales.

Il suffit, pour arriver à cette explication, de remarquer que si une courbe réelle a pour conjuguées des courbes fermées, la somme des éléments de l'intégrale quadratrice, correspondant à un chemin quelconque parcouru sur les branches réelles de cette courbe, peut s'augmenter, à un endroit quelconque du chemin, de la somme des éléments correspondant au parcours entier de la circonférence de la conjuguée tangente en ce point à la courbe réelle; et qu'un premier tour achevé, on peut le recommencer un nombre quelconque de fois avant de poursuivre sur la courbe réelle ; en sorte que la somme des éléments de l'intégrale correspondant à un parcours entier de cette conjuguée, si elle n'est pas nulle, doit nécessairement former une période de l'intégrale indéfinie qui représente l'aire de la courbe considérée.

Habituellement, quand on part d'un point pour y revenir, la somme des éléments de l'intégrale est nulle d'elle-même; mais il n'en sera pas ainsi lorsque le parcours se fera sur une conjuguée fermée : la somme des éléments représentera le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire de cette courbe.

En effet, lorsque le point $[x, y]$ parcourra de gauche à droite la moitié supérieure de la conjuguée, les éléments ydx de l'intégrale formeront, en s'ajoutant, l'aire du diamètre de la conjuguée, plus l'aire imaginaire comprise entre la conjuguée et son diamètre, au-dessus de ce dernier, et lorsque le point $[x, y]$ parcourra en sens contraire la moitié inférieure de la conjuguée, les éléments de l'intégrale, ajoutés, formeront l'aire imaginaire comprise entre la conjuguée et son diamètre, au-dessous de ce dernier, moins l'aire du diamètre.

Quelle que soit l'expression trouvée de l'aire de la courbe considérée, comprise entre deux limites quelconques, elle devra donc admettre comme période le produit par $\sqrt{-1}$ de la mesure de l'aire d'une quelconque des conjuguées fermées de cette courbe.

On serait en droit de conclure de là que les aires des conjuguées fermées d'une même courbe doivent être toutes égales entre elles, ou, du moins, que ces conjuguées se rangeront en quelques catégories dans chacune desquelles toutes les conjuguées auront même aire.

En effet, si l'intégrale ne doit avoir qu'une période imaginaire, il faudra bien que toutes les conjuguées fermées qui la donnent séparément aient même aire, et la raison qui légitime cette conclusion doit être évidemment de nature à pouvoir s'étendre au cas où il y aurait plusieurs catégories de conjuguées fermées comprises entre des branches différentes de la courbe réelle.

Mais il convient de donner une démonstration directe d'un fait aussi important.

351. *Théorème de l'équivalence des aires des conjuguées fermées d'une même catégorie.* — Soient $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, les points réels où l'une des conjuguées fermées d'un lieu touche la courbe réelle, et $[x_0 + dx_0, y_0 + dy_0]$, $[x_1 + dx_1, y_1 + dy_1]$ ceux où une conjuguée infiniment voisine touche la même courbe réelle : en vertu du théorème de l'indépendance de l'intégrale envers le chemin parcouru, l'intégrale aura la même valeur, soit que le point $[x, y]$ décrive l'arc de conjuguée qui s'étend du point $[x_0, y_0]$ au point $[x_1, y_1]$, ou bien l'arc de la courbe réelle qui va du point $[x_0, y_0]$ au point $[x_0 + dx_0, y_0 + dy_0]$, l'arc de conjuguée qui va du point $[x_0 + dx_0, y_0 + dy_0]$ au point $[x_1 + dx_1, y_1 + dy_1]$, et enfin l'arc de la courbe réelle qui va du point $[x_1 + dx_1, y_1 + dy_1]$ au point $[x_1, y_1]$; la partie imaginaire de l'intégrale, dans les deux cas, aura donc la même valeur; mais nous savons que, dans le premier cas, la partie imaginaire de l'intégrale représentera la moitié de l'aire de la première conjuguée, et, dans le second, la moitié de l'aire de la seconde; les aires de ces deux conjuguées sont donc égales.

C'est ainsi que toutes les conjuguées d'une même hyperbole ont même aire, comme cela résultait déjà du second théorème d'Apollonius. Quant au théorème général que nous venons d'établir, on voit qu'il consiste en une extension aux courbes de tous les ordres du second théorème d'Apollonius.

On tire de la démonstration même du théorème précédent cette conséquence, qui peut avoir de l'intérêt, que la différence des aires de deux diamètres d'une même courbe dans un intervalle où les cordes sont imaginaires, est égale à la différence des aires correspondant aux arcs de la courbe réelle, qui se terminent aux points où ces diamètres la coupent.

La démonstration précédente rend aussi raison de ce fait, qu'une intégrale, prise entre deux limites réelles appartenant à deux branches voisines de la courbe réelle, qui comprennent entre elles des conjuguées fermées, ne peut comprendre, dans sa partie imaginaire, qu'un nombre impair de demi-périodes correspondant à l'aire d'une de ces conjuguées, tandis que c'est le contraire lorsque les deux limites appartiennent à une même branche.

C'est pourquoi $\mathrm{L}x$ ou $\int_1^x \frac{dx}{x}$ est représenté par $\mathrm{L}x + 2\mathrm{K}\pi\sqrt{-1}$ tandis que $\mathrm{L}(-x)$ ou $\int_1^{-x} \frac{dx}{x}$ l'est par $\mathrm{L}x + (2\mathrm{K}+1)\pi\sqrt{-1}$.

352. *Remarque.* — Nous venons de montrer que la valeur de l'intégrale $\int y dx$, prise le long d'un anneau fermé de conjuguée, est le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire de cet anneau, que les anneaux fermés de conjuguées compris entre les mêmes branches de la courbe réelle ont même aire; enfin que le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire d'un de ces anneaux est une des périodes imaginaires de l'intégrale quadratrice.

Les anneaux fermés de conjuguées ne sont pas les seuls contours fermés qui jouissent de ces propriétés. Qu'on imagine, en effet, entre les deux branches de la courbe réelle qui comprennent des anneaux fermés de conjuguées un contour arbitraire remplissant seulement les deux conditions de toucher la courbe réelle en deux points situés sur les deux branches, et d'être formé de points deux à deux imaginaires conjugués, ce contour jouira exactement des mêmes propriétés qu'un anneau de conjuguée, c'est-à-dire qu'il enveloppera une aire constante, que le produit de cette aire par $\sqrt{-1}$ sera la valeur de l'intégrale prise le long du contour et que ce produit sera l'une des périodes imaginaires de l'intégrale quadratrice.

En effet, soient AMBNA le contour considéré, A et B les deux points où il touche la courbe réelle, et AQB le lieu des milieux des cordes joignant les points de AMB à leurs imaginaires conjuguées sur ANB.

Les formules du n° 340 donneront, pour l'intégrale prise le long de AMB, parcouru de A vers B,

$$= 2S_1 - \frac{1}{2}(S + S') + \frac{1}{2}(S - S')\sqrt{-1}$$

et pour l'intégrale prise le long de ANB, parcouru aussi de A vers B

$$I' = 2S_1 - \frac{1}{2}(S + S') - \frac{1}{2}(S - S')\sqrt{-1}$$

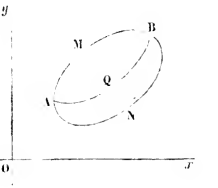


Fig. 19.

S, S' et S_1 désignant les aires des segments correspondant aux arcs AMB, ANB et AQB, comptées positivement.

Mais la valeur de l'intégrale prise le long du contour entier AMBNA sera la différence de ces deux intégrales et aura par conséquent pour valeur

$$I - I' = (S - S')\sqrt{-1} = [AMBNA]\sqrt{-1}.$$

D'un autre côté, le contour en question pourra être considéré comme produit par une déformation continue d'un anneau de conjuguée, en sorte que l'intégrale prise le long de ce contour aura la même valeur que l'intégrale prise le long de l'anneau de conjuguée, c'est-à-dire sera égale au produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire de cet anneau de conjuguée.

Ainsi les contours fermés composés de points imaginaires conjugués deux à deux ont bien même aire que les anneaux de conjuguées compris entre les mêmes branches de la courbe réelle. Mais le théorème, appliqué aux conjuguées, présente un intérêt bien plus grand, parce que ces conjuguées sont des courbes algébriques définies.

353. *Des périodes engendrées dans le parcours de l'enveloppe imaginaire.* — La considération de l'enveloppe imaginaire des conjuguées fournira la troisième classe de périodes.

Ces périodes sont les valeurs de l'intégrale quadratrice, prises le long des anneaux fermés de l'enveloppe imaginaire des conjuguées ; elles pour-

ront être réelles, imaginaires sans parties réelles, ou mixtes. Ces trois cas sont faciles à distinguer.

En supposant toujours, comme dans ce qui précède, que l'équation $f(x, y) = 0$ ait tous ses coefficients réels, les points de l'enveloppe imaginaire seront toujours conjugués deux à deux, mais ses anneaux pourront être constitués de différentes manières.

En premier lieu, un anneau pourra réunir deux suites de points imaginaires conjugués, ou bien être formé de points dont les conjugués formeraient ailleurs un autre anneau fermé.

D'un autre côté, dans la première hypothèse, il pourra arriver soit que les deux suites de points imaginaires conjugués se rejoignent à leurs extrémités par deux points réels, c'est-à-dire que l'anneau de l'enveloppe imaginaire touche la courbe réelle en deux points; ou bien que les points imaginaires conjugués qui composeront l'anneau restent toujours séparés, comme cela arrive, par exemple, dans le cas de l'ellipse imaginaire.

Dans le premier cas, deux mobiles dont les coordonnées resteraient à chaque instant conjuguées devraient partir en même temps de l'un des points réels de l'anneau et en parcourir les deux moitiés en sens inverses, tandis que dans le second ces deux mobiles devraient parcourir en même temps l'anneau entier dans le même sens, en restant toujours à peu près diamétralement opposés.

Quel que soit le cas où l'on se trouve, la valeur de l'intégrale prise le long de l'anneau considéré sera toujours une des périodes de l'intégrale quadratrice, mais elle ne sera, dans les trois cas, ni de même nature, ni liée de la même manière à l'aire de l'anneau.

354. Supposons d'abord qu'un anneau soit composé de deux suites de points imaginaires conjugués se rejoignant sur la courbe réelle : dans ce cas la période sera imaginaire sans partie réelle, car elle s'exprimera par la formule $I - I' = (S - S')\sqrt{-1}$ du numéro 352, elle sera d'ailleurs égale au produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire de l'anneau.

355. Dans le second cas, d'un anneau non tangent à la courbe réelle, mais composé toujours de points imaginaires conjugués deux à deux, puisque ce sera alors en parcourant les deux parties de l'anneau dans le même sens qu'on verra croître de la même manière, abstraction faite de leurs signes, les parties imaginaires des coordonnées, si I désigne toujours l'intégrale prise le long de l'arc AMB, parcouru de A en B, I′ sera maintenant la valeur de cette même intégrale prise le long de l'arc BNA parcouru de B vers A, de sorte que l'intégrale correspondant au tour entier AMBNA sera alors exprimée par $I + I'$, au lieu de $I - I'$.

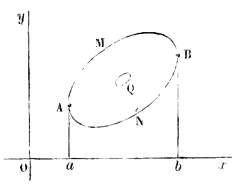


Fig. 20.

D'ailleurs, le lieu des milieux des cordes joignant les points imaginaires conjugués, tels que A et B, M et N, etc., sera maintenant un petit anneau Q et le point $[\alpha, \alpha']$ parcourra deux fois cet anneau Q, dans le même sens, pendant que le point $[x, y]$ fera une seule fois le tour de l'anneau AMBNA.

On aura donc, pour l'intégrale prise le long de l'arc AMB,

$$I = 2S_1 - \frac{1}{2}(S + S') + \frac{1}{2}(S - S')\sqrt{-1},$$

pour l'intégrale prise le long de l'arc BNA,

$$I' = 2S_1 - \frac{1}{2}(S + S') - \frac{1}{2}(S - S')\sqrt{-1},$$

et pour l'intégrale prise le long du contour AMBNA,

$$I + I' = 4S_1 - (S + S'),$$

S désignant l'aire positive aAMBb, S' l'aire négative bBNAa et S_1 l'aire de l'anneau Q.

La période sera réelle et égale à l'aire de l'anneau AMBNA de l'enveloppe, diminuée de quatre fois l'aire de l'anneau lieu des milieux des cordes réelles du contour AMBNA. Cette dernière pourra d'ailleurs être positive ou négative suivant le cas.

356. Enfin, si l'on suppose que l'enveloppe présente des couples d'anneaux dont l'un contienne les points imaginaires conjugués de ceux de l'autre, la période représentée par la valeur de l'intégrale correspondant au parcours de l'un d'eux sera généralement composée d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. Elle s'exprimera d'ailleurs en fonction des aires S et S' des deux anneaux conjugués et de l'aire S_1 du lieu des milieux des cordes joignant les points imaginaires conjugués des deux anneaux, par la formule

$$2S_1 - \frac{1}{2}(S + S') + \frac{1}{2}(S - S')\sqrt{-1};$$

mais on peut changer cette formule avec avantage en considérant à la fois les deux périodes imaginaires conjuguées correspondant aux deux anneaux ; la seconde serait :

$$2S_1 - \frac{1}{2}(S + S') - \frac{1}{2}(S - S')\sqrt{-1},$$

et on peut leur substituer leur somme et leur différence

$$4S_1 - (S + S') \quad \text{et} \quad (S - S')\sqrt{-1}.$$

357. Il n'y a évidemment pas d'autres périodes que celles des trois classes que nous venons de passer en revue, et qui correspondent au parcours de la courbe réelle, au parcours des conjuguées et au parcours de l'enveloppe imaginaire.

En effet, quel que soit le chemin que l'on imagine pour rejoindre les deux limites d'une intégrale, on pourra toujours le ramener à se composer d'arcs de conjuguées, d'arcs de la courbe réelle et d'arcs de l'enveloppe imaginaire des conjuguées, de sorte que toutes les parties de l'intégrale, et en particulier ses périodes, pourront s'engendrer sur ces différents arcs. Mais le long d'un arc indéfini l'intégrale croîtra sans limites et ne pourra, par conséquent, pas engendrer de période.

Du cas où la fonction est définie par une équation à coefficients imaginaires.

358. Les méthodes purement analytiques permettent de n'établir aucune différence entre les deux cas où les données d'une question sont réelles ou imaginaires, mais elles ne fournissent que des résultats bruts sans interprétation possible.

Les méthodes synthétiques obligent naturellement à distinguer les deux cas, par la simple raison que l'interprétation qu'elles fournissent des résultats auxquels elles conduisent, ne saurait être la même dans les deux circonstances.

Nous avons donc dû distinguer dans l'étude de l'intégrale quadratrice d'une courbe, les deux cas où l'équation de cette courbe représenterait un lieu réel accompagné de lieux imaginaires, ou ne fournirait plus que des lieux imaginaires; le cas où les deux enveloppes coexisteraient, de celui où il ne resterait que l'enveloppe imaginaire. Mais il sera facile de passer d'un des cas à l'autre.

Remarquons, au reste, que la question n'a pas un intérêt théorique bien considérable.

En effet, il est clair que les intégrales quadratrices de toutes les courbes représentées par une même équation, ont naturellement, toutes, les mêmes périodes exprimables par les mêmes fonctions des coefficients, en sorte que si l'on a discuté cette équation dans le cas où ses coefficients sont réels et exprimé les périodes de la quadratrice par des intégrales définies, les mêmes intégrales les fourniront encore dans le cas où les coefficients seraient devenus imaginaires, et que par conséquent la question qu'on voulait traiter se trouvera résolue d'avance.

359. Quoi qu'il en soit, il est bien facile de donner une théorie directe des périodes des intégrales portant sur des fonctions définies par des équations à coefficients imaginaires.

En effet, on a vu que lorsque les coefficients d'une équation deviennent imaginaires, la courbe réelle se transforme instantanément en enveloppe imaginaire, et que cette enveloppe imaginaire diffère d'abord infiniment peu de l'ancienne enveloppe réelle.

Si donc une courbe réelle présentait des anneaux fermés, dont les aires intérieures étaient des périodes réelles de sa quadratrice, l'enveloppe imaginaire de la transformée de cette courbe présentera des anneaux correspondants, et les sommes des éléments de la quadratrice correspondant aux parcours des anneaux fermés de cette enveloppe imaginaire, qui auront remplacé les anneaux fermés de la courbe réelle, seront encore des périodes de l'intégrale; ces périodes ne seront que les anciennes, transformées en raison des modifications subies par les coefficients de l'équation et seraient représentées par les mêmes formules, si on pouvait obtenir ces formules.

Ainsi, lorsque l'équation n'a plus ses coefficients réels, les périodes correspondant à celles qui s'engendraient dans le parcours des anneaux fermés de la courbe réelle, devront être cherchées dans le parcours des anneaux fermés de l'enveloppe imaginaire des conjuguées qui se seront ajoutés aux anciens, s'il y en avait déjà.

D'un autre côté, lorsque les coefficients d'abord réels d'une équation prennent des accroissements imaginaires infiniment petits, les conjuguées ne subissent non plus d'abord que des modifications insensibles; celles qui présentaient des anneaux fermés en présenteront encore et les valeurs de l'intégrale prise le long de ces anneaux seront encore des périodes de l'intégrale.

La règle est donc la même, que l'équation ait ses coefficients réels ou imaginaires.

Les périodes sont toujours les valeurs de l'intégrale correspondant aux parcours des anneaux fermés des conjuguées et de l'enveloppe. Toute la différence consiste en ce que ces périodes sont généralement toutes composées d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, et n'ont plus, d'ailleurs, un rapport aussi simple avec les aires des anneaux. Elles sont, au reste, toujours liées à ces aires par la formule

$$I = 2S_1 - \frac{1}{2}(S + S') + \frac{1}{2}(S - S')\sqrt{-1}.$$

CHAPITRE XXXI

EXEMPLES DIVERS DE PÉRIODES CORRESPONDANT AUX DIFFÉRENTS CAS INDIQUÉS PAR LA THÉORIE

360. Avant d'aller plus loin, nous citerons quelques exemples des faits que nous venons d'établir.

Soit d'abord l'intégrale

$$\frac{b}{a}\int dx\sqrt{x^2-a^2},$$

qui exprime l'aire indéfinie de l'hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, elle est égale à

$$\frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a}-\frac{ab}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a},$$

et a pour période $\pi ab\sqrt{-1}$. Cette quantité représente bien l'aire d'une quelconque des ellipses conjuguées de l'hyperbole, car ayant toutes un système de diamètres conjugués commun avec l'hyperbole, en vertu du théorème d'Apollonius, elles ont toutes même aire que l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$.

Suivant que x est positif ou négatif, $\mathrm{L}\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ est égal au logarithme arithmétique de $\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ plus $2k\pi\sqrt{-1}$, ou au logarithme arithmétique de $\frac{-x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ plus $(2k+1)\pi\sqrt{-1}$; on voit donc, comme on l'avait annoncé au n° 351, que, suivant que les limites de l'intégrale sont prises sur une même branche ou sur les deux, la partie imaginaire de cette intégrale contient un nombre pair ou un nombre impair de fois la demi-période.

De même, $\int\frac{dx}{x}=\mathrm{L}x$ a pour période $2\pi\sqrt{-1}$, et cette quantité représente bien l'aire d'une quelconque des conjuguées de l'hyperbole

équilatère $y = \frac{1}{x}$, car celle qui la touche aux extrémités de son axe transverse est le cercle dont le rayon est $\sqrt{2}$.

361. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{L}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \arcsin x,$

a aussi pour période $2\pi\sqrt{-1}$.

L'équation $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ représente en coordonnées réelles une courbe ABA'B'A''B''A'''B'''(*fig.* 21), asymptote à l'axe x et aux droites $x = \pm 1$.

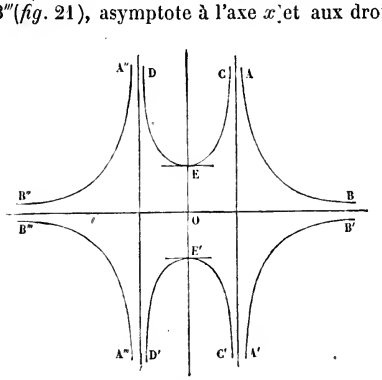


Fig. 21.

Sa conjuguée à abscisses réelles DECD'E'C' est aussi asymptoteaux droites $x = \pm 1$; les autres sont fermées, leur aire commune est $2\pi\sqrt{-1}$.

$2\pi\sqrt{-1}$ est aussi l'aire de la surface comprise entre les deux branches CED, C'E'D', de sorte que la conjuguée non fermée a, si l'on peut parler ainsi, la même aire que les conjuguées fermées.

On rencontre souvent des exemples semblables de courbes réelles ou imaginaires à branches infinies, dont l'aire finie forme période de l'intégrale qui représente leur aire indéfinie. En voici quelques-uns.

362. D'abord l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est arc sin x, dont la période est 2π.

L'équation $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ représente la courbe réelle CEDC'E'D'

(*fig.* 21), la courbe imaginaire ABA'B'A''B''A'''B''', dont les abscisses sont réelles, et d'autres courbes imaginaires.

La période réelle 2π de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est l'aire de la surface comprise entre les deux branches réelles CED, C'E'D', comme la période $2\pi\sqrt{-1}$ de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ était l'aire de la surface comprise entre les deux mêmes branches lorsquelles étaient imaginaires.

363. De même, $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } x$ a pour période π, qui est

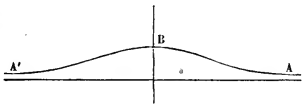


Fig. 22.

l'aire de la courbe ABA' (*fig.* 22), représentée par l'équation $y = \frac{1}{1+x^2}$.

364. Considérons encore l'intégrale qui donne l'arc de l'ellipse,

$$\int dx \sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}.$$

Cette intégrale a deux périodes, l'une réelle, l'autre imaginaire ; en effet, l'équation $y = \sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}$ représente (*fig.* 23) la courbe réelle ACBA'C'B'A''C''B''A'''C'''B''', asymptote aux droites $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, symétrique par rapport aux deux axes, et ayant pour sommets les points C, C' situés sur l'axe des y, à la distance 1 de l'origine, et les points C''', C'' situés sur l'axe des x, à la distance $\frac{1}{e}$ plus grande que 1 ; la courbe imaginaire à abscisses réelles FC''F'F''C'''F''', et enfin d'autres courbes imaginaires fermées. Or l'aire comprise entre la branche réelle BCA et l'axe des x est finie, car elle est moindre que l'aire fournie entre les mêmes limites -1 et $+1$ par l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, l'aire comprise entre les deux branches réelles BCA, B'C'A' est donc aussi finie : ce sera la période réelle de l'intégrale.

D'un autre côté, l'aire de la courbe imaginaire à abscisses réelles FC''F'

est aussi finie, car elle est plus petite que l'aire fournie entre les mêmes limites, 1 et $\frac{1}{e}$, par l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$, qui est égale à $\mathrm{L}\left(\frac{1}{e}+\sqrt{\frac{1}{e^2}-1}\right)$.

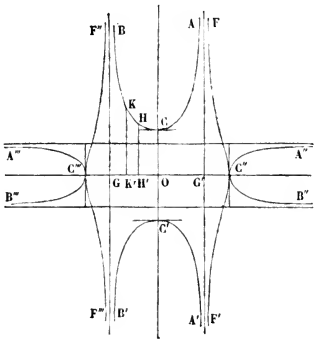


Fig. 23.

La somme des deux aires imaginaires FC″F′ et F″C‴F‴ pourra donc former la période imaginaire de l'intégrale, période qui se retrouverait dans l'aire d'une quelconque des conjuguées fermées du lieu en question.

En partant d'un point K quelconque de la courbe réelle, pour former l'aire correspondant à l'arc KH de cette courbe, on pourrait faire suivre au point mobile $[x, y]$ le chemin KCAFC″F′A′C′BF‴C‴F″BKH, et l'intégrale des éléments ydx correspondant à ce parcours serait l'aire KK′H′H augmentée de la somme des deux périodes réelle et imaginaire (1).

Dans l'exemple que nous venons d'analyser, la période réelle est naturellement la longueur totale de l'ellipse dont le grand axe est 1 et dont l'excentricité est e. Mais quant à la période imaginaire, on voit bien quelle aire elle représente, mais on ne saurait dire comment elle se lie à la question de la rectification de l'ellipse, c'est-à-dire de quelle courbe elle donne la longueur.

---

(1) Nous ne prétendons pas ici donner une démonstration à laquelle on pourrait objecter que de l'infini réel à l'infini imaginaire il n'y a pas continuité ; les faits se passent comme si cette objection était sans force et nous les citons. Au reste, dans l'exemple dont il s'agit, comme dans tous les autres analogues, on pourrait, en transformant l'intégrale, substituer, comme l'a montré M. Sturm, à une valeur infinie de y, une valeur nulle d'une autre variable, à une branche infinie, ayant une aire finie, un anneau fermé compris entre les mêmes limites, et la continuité reparaîtrait complète.

365. L'exemple de l'intégrale qui sert à rectifier l'hyperbole est plus intéressant en ce que l'on peut trouver dans la question elle-même de la rectification effectuée, l'interprétation de chacune des deux périodes.

Nous rappellerons d'abord ce qui a été dit au n° 225, 1re partie, que l'arc de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu est fourni par la même intégrale qui donne l'arc de l'enveloppe réelle ou de la courbe proposée.

Cela posé, considérons l'hyperbole $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, pour laquelle $ds = dx\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}$. Si l'on fait $z = a\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}$, cette

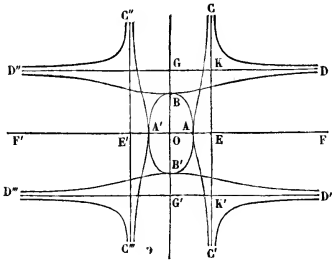


Fig. 24.

équation représentera la courbe réelle ABA'B'CDC'D'C''D''C'''D''', dont la conjuguée à abscisses réelles est CAC'C''A'C''', et la conjuguée à ordonnées réelles DBD''D'B'D''' : le quotient par a de l'aire CDEF représentera l'arc de l'hyperbole proposée, compté à partir du sommet, et le quotient par a de l'aire BODF, représentera l'arc de l'hyperbole supplémentaire, compté aussi à partir de son sommet.

L'intégrale $a\int dx\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}$ aura d'ailleurs pour période réelle, ω, l'aire fermée ABA'B', et pour période imaginaire, $\omega'\sqrt{-1}$, le quadruple de l'aire CAE ou le quadruple de l'aire DBG ou le double de l'aire d'un des deux anneaux fermés d'une conjuguée quelconque qui serait comprise entre CD et AB, C'''D''' et A'B' ou C'D' et AB', C''D'' et A'B.

Mais l'aire DGB, c'est-à-dire ω', est la limite de la différence entre les aires FOBD et FOGD indéfiniment prolongées, c'est-à-dire entre les produits par a de l'arc indéfini de l'hyperbole supplémentaire et de l'asymptote, arrêtés à deux points de même abscisse infinie, car OG étant égal à ae ou c, l'aire FOGD a pour mesure cx et le quotient de cette aire par a est $\frac{c}{a}x$.

Ainsi le quart de la période imaginaire de l'intégrale qui donne

l'arc d'une hyperbole est, abstraction faite du signe $\sqrt{-1}$, la limite de la différence entre les longueurs indéfinies de son asymptote, comptée à partir du centre, et de l'hyperbole supplémentaire, comptée à partir de son sommet, ces deux longueurs étant terminées en des points ayant même abscisse.

La période réelle s'interprète de la même manière : elle représente la différence des longueurs indéfinies de l'hyperbole et de ses deux asymptotes. En effet, les intégrales qui serviraient à rectifier les deux hyperboles, considérées comme réelles, ont les mêmes périodes changées de réelles en imaginaires, et réciproquement; car ces intégrales sont

$$\frac{1}{a}\int dx\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{x^2-a^2}}$$

et

$$\frac{1}{a}\int dx\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2+a^4}{x^2+a^2}};$$

or si l'on y fait abstraction du facteur $\frac{1}{a}$, elles représentent les aires des courbes

$$y^2=\frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{x^2-a^2}$$

et

$$y^2=\frac{(a^2+b^2)x^2+a^4}{x^2+a^2};$$

mais, d'après notre théorie des quadratures, les intégrales $\Sigma y dx$ et $\Sigma x dy$, se rapportant à la même courbe, ont les mêmes périodes; et comme les équations précédentes donnent

$$x^2=\frac{a^2y^2-a^4}{y^2-a^2-b^2} \quad \text{et} \quad x^2=\frac{a^2y^2-a^4}{a^2+b^2-y^2},$$

les périodes des intégrales proposées sont donc respectivement égales à celles des intégrales

$$\int dy\sqrt{\frac{y^2-a^2}{y^2-a^2-b^2}} \quad \text{et} \quad \int dy\sqrt{\frac{y^2-a^2}{a^2+b^2-y^2}}.$$

Mais l'une de ces deux dernières se forme de l'autre multipliée par $\sqrt{-1}$; elles ont donc les mêmes périodes changées de réelles en imaginaires, et réciproquement.

Du reste, la figure 24 suggérerait aussi cette seconde proposition, car l'arc de l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

compté à partir du sommet, est représenté par le quotient par a de l'aire CDEF, et comme, on l'a déjà dit, la longueur de l'asymptote, comptée à partir du centre, l'est par le quotient par a de l'aire GDOF.

Or, si l'on faisait décrire au point $[x,z]$ le chemin CDGD″C″E′C″D‴G′D′C′EC, on aurait engendré une aire égale au produit par a de la différence entre les longueurs totales de l'hyperbole réelle et de ses deux asymptotes.

Le rapprochement des deux théorèmes montre que la différence des longueurs totales des deux hyperboles arrêtées en des points ayant une même abscisse infinie est la différence des valeurs absolues des deux périodes.

Quant à la période réelle, c'est-à-dire à la différence des longueurs totales de l'hyperbole réelle et de ses asymptotes, elle est encore représentée, au facteur a près, par l'aire de l'anneau ABA′B′.

366. Ces résultats se sont présentés de la manière suivante : le long des asymptotes considérées comme fournies par les solutions imaginaires dont la caractéristique est $\pm\frac{b}{a}$, $\frac{dy}{dx}$ est réel et constamment égal à $\pm\frac{b}{a}$. En effet, si l'on pose, dans l'équation de l'hyperbole,

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},\quad y = \alpha' \pm \beta\frac{b}{a}\sqrt{-1},$$

il en résulte

$$a^2\alpha'^2 - b^2\alpha^2 = -a^2b^2 \quad \text{et} \quad a\alpha' = \pm b\alpha;$$

c'est-à-dire que α et α' doivent rester infinis et conserver entre eux le rapport de a à b, que, par conséquent, $\frac{dy}{dx}$ se réduit dans tous les cas à $\frac{b}{a}$ et que $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$ conserve toujours la valeur du cosinus de l'angle de l'asymptote avec l'axe des x.

Au reste, pour que le point $x = \alpha + \beta, y = \alpha' \pm \beta\frac{b}{a}$ engendre l'une des asymptotes, il faudra que $\alpha + \beta$ et $\alpha' \pm \beta\frac{b}{a}$ puissent prendre des valeurs finies ; mais cela se pourra faire de deux manières différentes : ou bien en laissant α et α' constants, mais infinis, et faisant varier β et $\pm\beta\frac{b}{a}$ en sens contraires de ceux dans lesquels on aura fait

croître α et α', auquel cas dx se réduira à $d\beta\sqrt{-1}$, ou bien en donnant d'abord à β et à $\pm\beta\frac{b}{a}$ des valeurs infinies doubles des valeurs infinies de $\alpha+\beta$ et de $\alpha'\pm\beta\frac{b}{a}$, laissant alors β et par suite $\pm\beta\frac{b}{a}$ fixes et faisant varier α et α' en sens contraires, auquel cas dx se réduira à $d\alpha$.

Dans l'un et l'autre cas l'intégrale $\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ représentera, abstraction faite du signe, le chemin parcouru sur l'asymptote.

Cela posé, si, pour aller de M en N, on suit d'abord l'arc indéfini MNT de la courbe réelle, qu'on parcoure ensuite l'asymptote TT′ en faisant varier β seulement, qu'on prenne alors l'arc T′T″ de l'hyperbole supplémentaire, puis l'asymptote T″T‴ en ne faisant encore varier que β seulement, puis l'arc T‴T de l'hyperbole supplémentaire et enfin l'arc

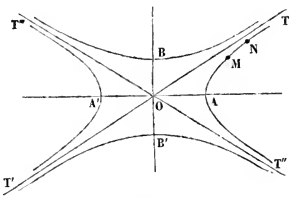


Fig. 25.

TN de la courbe réelle, on aura engendré, en sus de l'arc MN, quatre fois la différence, imaginairement représentée, des distances BT, OT, quantité qui doit former une période de l'intégrale, puisqu'on peut recommencer un nombre quelconque de fois le parcours des deux asymptotes et de l'hyperbole supplémentaire avant de rentrer sur la courbe réelle.

De même, si l'on suit d'abord l'arc MNT, puis qu'on parcoure l'asymptote TT′ en faisant varier seulement α et α', qu'on prenne ensuite le chemin T′A′T‴, puis qu'on suive l'asymptote T‴T″, en ne faisant encore varier que α et α', enfin qu'on parcoure l'arc T‴AMN, on aura engendré, en sus de l'arc MN, quatre fois la différence réelle des distances OT et AT, quantité qui, de même, doit former une période réelle de l'intégrale rectificatrice de l'hyperbole.

367. Considérons maintenant le lieu

$$a^2y^2+b^2x^2=-a^2b^2,$$

la quadratrice doit avoir pour période πab, car l'équation ne diffère de

celle de l'ellipse réelle qu'en ce que a et b y sont remplacés par $a\sqrt{-1}$ et $b\sqrt{-1}$.

Ce résultat s'accorde avec la théorie du n° 355 auquel l'exemple se rapporte, car le lieu est ici complétement imaginaire et présente une enveloppe imaginaire constituant un anneau fermé composé de points imaginaires conjugués ne se rejoignant nulle part.

L'anneau Q étant ici réduit à l'origine, la période doit être l'aire de l'anneau formé par l'enveloppe, supposée réelle. Or, c'est ce qui a lieu en effet, l'enveloppe étant l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

fournie par les solutions de la forme $x = \beta\sqrt{-1}$, $y = \beta'\sqrt{-1}$ de l'équation proposée.

368. Considérons encore le lieu

$$x^4 + y^4 = a^4.$$

La quadratrice de cette courbe a neuf périodes, comme on le verra par une théorie qui sera exposée plus tard, mais nous pouvons en signaler quelques-unes.

En premier lieu, l'aire de la courbe réelle est déjà une période réelle, mais il y en a une autre égale, qui correspond au parcours du même anneau de la courbe réelle, considéré comme enveloppe imaginaire des conjuguées et fourni alors par les solutions de la forme $x = \beta\sqrt{-1}$, $y = \beta'\sqrt{-1}$. Cet anneau tombe, comme le précédent, dans le cas du n° 355, avec la même circonstance que l'anneau Q est évanouissant.

La quadratrice du lieu admet encore pour période le produit par $\sqrt{-1}$ de la période réelle déjà signalée. En effet, le même anneau fourni par les solutions de la forme $x = \alpha, y = \beta'\sqrt{-1}$, ou par les solutions de la forme $x = \beta\sqrt{-1}, y = \alpha'$ est un anneau fermé de la conjuguée $C = \infty$, ou de la conjuguée $C = 0$.

369. Considérons enfin l'équation du cercle imaginaire

$$(y - b - b'\sqrt{-1})^2 + (x - a - a'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

l'enveloppe des conjuguées de ce lieu est, comme on sait, le cercle

$$(y - b - b')^2 + (x - a - a')^2 = (r + r')^2.$$

Ce lieu tombe dans le cas du n° 356, si du moins on le regarde comme une partie du lieu à coefficients réels

$$\left.\begin{array}{l}[(y-b-b'\sqrt{-1})^2 + (x-a-a'\sqrt{-1})^2 - (r+r'\sqrt{-1})^2] \\ [(y-b+b'\sqrt{-1})^2 + (x-a+a'\sqrt{-1})^2 - (r-r'\sqrt{-1})^2]\end{array}\right\} = 0;$$

l'enveloppe présente, en effet, deux anneaux fermés dont l'un contient les points imaginaires conjugués de ceux de l'autre.

La période que l'on sait d'avance devoir être

$$\pi\left(r+r'\sqrt{-1}\right)^2$$

doit être la valeur de l'intégrale $\int ydx$ prise le long de l'enveloppe imaginaire.

Or, l'anneau conjugué de celui que nous considérons est le cercle

$$(y-b+b')^2+(x-a+a')^2=(r-r')^2,$$

et quant au lieu des milieux des droites qui joignent les points imaginaires conjugués sur l'un et l'autre anneau, c'est le cercle

$$y^2+x^2=r^2;$$

la formule à appliquer

$$\mathrm{I}=2\mathrm{S}_1-\frac{1}{2}(\mathrm{S}+\mathrm{S}')+\frac{1}{2}(\mathrm{S}-\mathrm{S}')\sqrt{-1}$$

est donc ici

$$\mathrm{I}=2\,\pi r^2-\frac{1}{2}\pi\left[(r+r')^2+(r-r')^2\right]+\frac{1}{2}\pi\left[(r+r')^2-(r-r')^2\right]\sqrt{-1}$$

qui se réduit en effet à

$$\mathrm{I}=\pi\left(r+r'\sqrt{-1}\right)^2.$$

CHAPITRE XXXII

DE LA MANIÈRE DONT S'ACCROIT L'INTÉGRALE, ET DU MODE LE PLUS GÉNÉRAL DE GÉNÉRATION DES PÉRIODES

370. Nous avons supposé jusqu'ici que les périodes de l'intégrale $\int y dx$ fussent engendrées par le mouvement du point $[x, y]$ le long des anneaux définis correspondants. Mais elles s'engendreront habituellement dans le parcours de contours fermés quelconques ; il y a donc lieu de chercher comment elles se produiront alors.

Occupons-nous d'abord des périodes réelles représentées par les aires des anneaux fermés de la courbe réelle et, pour cela, supposons que le point $[x, y]$ reste constamment sur des conjuguées tangentes à un même anneau réel.

Le point $[x, y]$ s'éloignant de sa position initiale, outre la quantité algébrique $\frac{y^2}{2C} - \frac{y_0^2}{2C_0}$, l'intégrale, à chaque instant, se composera de la portion de l'aire de la conjuguée à laquelle appartient la limite inférieure, correspondant à l'arc de cette courbe qui s'étend de cette limite au point de contact avec la courbe réelle; de la portion de l'aire de la courbe réelle correspondant à l'arc compris entre les points où elle touche les conjuguées qui passent par les deux points limites; enfin de la portion de l'aire de la conjuguée à laquelle appartient la limite supérieure, correspondant à l'arc de cette courbe qui va du point où elle touche la courbe réelle à la limite supérieure.

Dans cette somme la première partie est fixe et les deux autres variables, la seconde est réelle, et la troisième se compose d'une partie réelle qui représente l'aire du diamètre de la conjuguée et d'une partie imaginaire qui représente l'aire comprise entre la conjuguée et son diamètre.

Lorsque le point $[x, y]$ se déplace, la seconde partie de l'intégrale s'accroît de l'aire de la courbe réelle qui correspond à l'arc que vient de parcourir sur cette courbe le point où la touche la conjuguée qui passe au point mobile $[x, y]$, et la troisième s'accroît dans ses deux par-

ties à mesure que le point $[x, y]$ s'éloigne de la courbe réelle, sur la conjuguée où il se trouve.

Quant aux parties réelle et imaginaire de

$$\frac{y^2}{2C} - \frac{y_0^2}{2C_0},$$

elles varient avec la position du point $[x, y]$, mais lorsque ce point revient à sa position initiale, quelque chemin qu'il ait suivi, $\frac{y^2}{2C}$ revient à sa valeur initiale $\frac{y_0^2}{2C}$ et la partie complémentaire s'évanouit.

Cela posé, il est facile de voir comment s'engendrera généralement la période relative à l'anneau réel considéré et quel multiple de cette période il faudra comprendre dans la valeur de l'intégrale.

D'après ce qui précède, cette période s'engendrera par le déplacement sur l'anneau réel du point où le touchera la conjuguée sur laquelle viendra se placer successivement le point $[x, y]$; lorsque ce point de contact aura fait le tour entier de l'anneau, l'aire intérieure aura été décrite, de telle sorte que si le point $[x, y]$ reprenait sa position initiale, la somme des éléments de l'intégrale se réduirait à l'aire de l'anneau, et que si le point $[x, y]$ revenait en un point différent du point de départ, mais situé sur la même conjuguée, la somme des éléments de l'intégrale représenterait l'aire intérieure de l'anneau, augmentée de l'aire correspondant à l'arc parcouru sur la conjuguée.

En d'autres termes, si le point $[x, y]$ s'éloignant de la courbe réelle sur une conjuguée quelconque, la partie réelle de l'intégrale pouvait s'accroître sans limite de nouveaux éléments, cette intégrale ne comprendrait pas cependant un seul des éléments différentiels de l'aire qui forme la période ; cette aire ne s'introduit dans la valeur de l'intégrale que par le déplacement sur l'anneau réel du point où le touche la conjuguée mobile sur laquelle se trouve successivement le point $[x,y]$; mais autant de tours ce point de contact fait sur l'anneau réel, autant de fois il faut ajouter la période à l'aire la plus simple que représente l'intégrale en raison de ses limites.

Ce nombre s'obtiendra en comptant le nombre de fois que la caractéristique C repassera par sa valeur initiale, l'angle dont il est la tangente ayant varié de 2π dans le même sens ; et ces périodes devront être prises en plus ou en moins, suivant que la variation totale de l'angle dont il vient d'être parlé se sera faite dans un sens ou dans l'autre.

Les explications qui précèdent conviendraient évidemment au cas d'une intégrale ayant plusieurs périodes réelles, correspondant à autant d'anneaux fermés de la courbe réelle.

Dans les cas où la période réelle serait l'aire d'une branche infinie, pour compter le nombre de périodes qu'on devrait comprendre dans la valeur de l'intégrale, quoiqu'on pût le faire directement, ce qu'il y aurait habituellement de plus simple à faire, serait de transformer

cette intégrale, de manière que la fonction sous le signe $\int$ devînt l'ordonnée d'une courbe fermée et finie.

371. La même théorie s'applique évidemment dans les mêmes termes aux périodes réelles, imaginaires sans parties réelles, ou mixtes, qui correspondraient aux anneaux fermés que pourrait présenter l'enveloppe imaginaire des conjuguées.

372. Passons maintenant aux périodes imaginaires répondant aux anneaux fermés de conjuguées. La question paraît plus difficile au premier abord : rien, en effet, d'analogue à ce qui vient d'être dit, ne pourra plus rendre compte de leur génération ; cependant on va voir que la réponse sera tout aussi aisée à former.

Chacune des périodes imaginaires qui nous occupent, abstraction faite du signe $\sqrt{-1}$, est l'aire de l'une quelconque des conjuguées fermées appartenant à une même catégorie, de sorte que si le point $[x, y]$ se déplaçait sur une conjuguée non fermée, la partie imaginaire de l'intégrale pourrait augmenter indéfiniment, sans pour cela comprendre une seule partie d'une des périodes imaginaires.

D'un autre côté, lorsque le point $[x, y]$ se déplace sur une conjuguée fermée, tant qu'il n'est pas revenu à son point de départ, la période n'est pas complète, et s'il se déplace en restant sur des conjuguées fermées d'une même catégorie, la période n'est complète que lorsqu'il revient, après un tour entier, en un point situé sur une nouvelle conjuguée, à une distance de la courbe réelle qui fournisse la même aire imaginaire que la distance du point de départ à la même branche de la courbe réelle. Par conséquent, tant que le point $[x, y]$, s'éloignant du point de départ, supposé imaginaire, n'a pas passé sur la courbe réelle, l'intégrale ne contient pas encore une moitié de la période ; mais si, après avoir passé sur l'une des branches de la courbe réelle qui comprennent entre elles les conjuguées fermées dont il s'agit, le point $[x, y]$ arrive à l'autre branche, l'intégrale pendant ce parcours se sera augmentée d'une demi-période positive ou négative, suivant le sens dans lequel aura marché le point mobile, et suivant aussi qu'il aura parcouru les branches supérieures ou inférieures des conjuguées sur lesquelles il aura passé : chaque fois ensuite que le chemin qu'il décrira viendra alternativement raser la courbe réelle sur ses deux branches, l'intégrale s'accroîtra d'une nouvelle demi-période.

Dans le compte à faire des périodes que doit comprendre l'intégrale, les passages des coordonnées x et y du point mobile par des valeurs réelles, joueront donc le principal rôle ; à chaque passage relevé, on devra reconnaître si le point $[x, y]$ a changé ou non de côté par rapport au point de contact, avec la courbe réelle, de la conjuguée sur laquelle il est venu se placer ; cela fait, on comptera autant moins deux de demi-périodes qu'on aura relevé de passages alternatifs sur l'une ou l'autre branche, sans rebroussement, en négligeant tous les retours consé-

cutifs à la même branche qui n'auraient pas été séparés par des passages sur l'autre. Si le point $[x, y]$, après avoir touché une des branches, revenait sur ses pas en restant du même côté du point de contact avec la courbe réelle, de la conjuguée sur laquelle il se serait transporté, on défalquerait une demi-période lorsqu'il arriverait à l'autre branche.

En résumé, pour ce qui concerne les périodes qui nous occupent, le chemin suivi par le point $[x, y]$ étant défini par une condition $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, entre les parties réelles et imaginaires de ses coordonnées, il faudra chercher les points où ce chemin touche le lieu réel, c'est-à-dire chercher les points de rencontre des deux courbes $f(x,y)=0$, $\varphi(x, o, y, o) = 0$, voir comment se succèdent les contacts correspondants, enfin reconnaître si après quelques-uns d'entre eux le point $[x,y]$ ne rebrousse pas chemin, et il sera ensuite toujours aisé de conclure.

373. Il résulte de l'ensemble des théories qui précèdent que, quelque soit le système d'axes, auquel on rapporte une même courbe, les périodes de sa quadratrice sont toujours les mêmes, puisque ce sont toujours les aires des mêmes anneaux fermés, réels ou imaginaires. Ainsi notamment les deux intégrales

$$\int y dx \quad \text{et} \quad \int x dy$$

relatives à la même courbe ont toujours les mêmes périodes.

Il en résulte aussi que, si l'on projette orthogonalement une courbe d'un plan sur un autre, les périodes de l'intégrale quadratrice sont multipliées par le cosinus de l'angle des deux plans, et que si la projection est faite obliquement, les périodes sont multipliées par le rapport des sinus des angles des rayons projetants avec le plan primitif de la courbe et avec le plan de projection.

374. Mais voici une autre remarque plus importante, parce qu'elle se rapporte à un genre de transformations beaucoup plus complexes, quoique tout aussi générales : si l'on passe de l'équation d'une courbe à celle de l'une de ses conjuguées, d'ailleurs quelconque, les périodes de la quadratrice seront multipliées par $\sqrt{-1}$; si l'on passe ensuite de l'équation de la conjuguée considérée, de la courbe primitive, à celle de l'une quelconque de ses conjuguées, les périodes seront de nouveau multipliées par $\sqrt{-1}$ et par conséquent reviendront à leur premier état. Les quadratrices de deux courbes qui ont une conjuguée commune ont donc mêmes périodes.

Du reste, si l'on répète indéfiniment la même transformation, les périodes restent toujours les mêmes, au facteur $\sqrt{-1}$ près.

Des périodes de l'intégrale rectificatrice d'une courbe.

375. Nous avons déjà fait remarquer, dans la première partie de cet ouvrage, que l'intégrale

$$\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

fournit aussi bien la rectification de l'enveloppe imaginaire des conjuguées que celle de la courbe réelle.

D'un autre côté les deux intégrales qui servent à rectifier une hyperbole et sa supplémentaire ont présenté cette circonstance remarquable que leurs périodes étaient les mêmes, mais seulement changées de réelles en imaginaires et réciproquement. Il est facile de voir que cette coïncidence n'a rien de fortuit et se représentera toujours dans tous les cas.

En effet, il est clair d'abord que l'intégrale

$$\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

a pour périodes réelles les longueurs des anneaux fermés de la courbe réelle.

D'un autre côté, si l'enveloppe imaginaire présente un anneau fermé composé de points imaginaires conjugués deux à deux, les tangentes à cet anneau, en deux points imaginaires conjugués, seront parallèles, car les coefficients différentiels seront en ces points

$$\frac{d\alpha' + d\beta' \sqrt{-1}}{d\alpha + d\beta \sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha' - d\beta' \sqrt{-1}}{d\alpha - d\beta \sqrt{-1}}$$

et à cause de l'hypothèse $\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{d\beta'}{d\beta}$, qu'entraîne celle de leur réalité, ils ne différeront pas l'un de l'autre. Ainsi les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, en deux points conjugués de l'anneau seront égales. Quant à celles de dx elles seront telles que $d\alpha + d\beta \sqrt{-1}$ et $d\alpha - d\beta \sqrt{-1}$. Mais il y a lieu ici de distinguer les deux cas, examinés déjà au numéro 353, où les deux suites de points imaginaires conjugués composant l'anneau de l'enveloppe, se rejoindraient ou non par des points réels. Dans le premier cas les points imaginaires conjugués de l'anneau seront séparés par le point réel où les deux enveloppes se toucheront en s'infléchissant, et si un point $[x, y]$ parcourt l'anneau considéré d'une matière continue, les deux éléments conjugués séparés par le point d'inflexion, devront être

considérés comme décrits dans le même sens positif ou négatif, puisque le point mobile les décrira tous deux de droite à gauche ou de gauche à droite, mais d'un autre côté, si l'abscisse varie de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ à $\alpha + d\alpha + (\beta + d\beta)\sqrt{-1}$ de la première extrémité à la seconde de l'un d'eux, elle variera de $\alpha + d\alpha + (\beta + d\beta)\sqrt{-1}$, à $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, de la première extrémité à la seconde de l'autre, de sorte que les deux valeurs de dx à considérer devront être

$$d\alpha + d\beta\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad - d\alpha + d\beta\sqrt{-1},$$

et que par conséquent la somme des deux éléments de l'intégrale devra être

$$2d\beta\sqrt{-1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Dans le second cas, au contraire, les deux valeurs de dx à considérer seront conjuguées, mais alors le point $[x, y]$, mobile le long de l'anneau, décrira l'un des deux éléments de droite à gauche et son conjugué de gauche à droite, de sorte que l'un d'eux devra être considéré comme parcouru en sens contraire du sens positif et que, par conséquent, il y aura alors lieu de retrancher les deux éléments

$$(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{et} \quad (d\alpha - d\beta\sqrt{-1})\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

de l'intégrale.

La somme des éléments de l'intégrale, correspondant à deux éléments conjugués de l'anneau, sera donc dans tous les cas

$$2d\beta\sqrt{-1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Elle sera imaginaire sans partie réelle et représentera le produit par $\sqrt{-1}$ de la somme des deux éléments réalisés de l'anneau. Ainsi les produits par $\sqrt{-1}$ des longueurs des anneaux fermés de l'enveloppe seront les périodes imaginaires de l'intégrale

$$\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Cela posé, les deux enveloppes étant toujours réciproques, il est clair que si l'on forme les deux intégrales qui les rectifieraient réelles, ces deux intégrales auront toujours les mêmes périodes mais changées de réelles en imaginaires.

Ce que nous venons de dire se rapporte aux périodes qui représenten t

les longueurs des anneaux fermés de la courbe réelle et de l'enveloppe imaginaire des conjuguées; mais on a vu par l'exemple de la rectification de l'hyperbole que les périodes peuvent correspondre à des différences de longueurs infinies.

Ces périodes se multiplient aussi par $\sqrt{-1}$ lorsqu'on passe d'une courbe à l'enveloppe imaginaire de ses conjuguées réalisée; mais, et ce point est bien plus intéressant, les deux théorèmes relatifs aux périodes de la rectificatrice de l'hyperbole sont aussi susceptibles d'une entière généralisation. C'est-à-dire 1° que si l'on décompose de toutes les manières possibles la courbe proposée en groupes d'arcs indéfinis dans les deux sens, dont les asymptotes, également prolongées dans les deux sens, forment avec ces arcs des circuits complets, la différence entre la somme des longueurs totales des arcs d'un même groupe et la somme totale des longueurs des asymptotes correspondantes sera une des périodes réelles de la rectificatrice de la courbe proposée, et 2° que si, de même, on décompose de toutes les manières possibles l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la courbe proposée en groupes d'arcs indéfinis dans les deux sens, dont les asymptotes, également prolongées dans les deux sens, forment avec ces arcs de l'enveloppe des circuits complets, le produit par $\sqrt{-1}$ de la différence entre la somme des longueurs totales des arcs d'un même groupe et la somme totale des longueurs des asymptotes correspondantes sera une des périodes imaginaires, sans parties réelles, de la rectificatrice de la courbe proposée.

Ainsi, pour avoir les périodes réelles de la rectificatrice, on partira d'une quelconque T_nAT des branches indéfinies de la courbe réelle; on suivra par exemple l'asymptote TT' correspondant à la partie AT de cette branche, on prendra ensuite la branche $T'T''$ de la courbe réelle, puis l'asymptote $T''T'''$, puis la branche $T'''T''''$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on retombe sur l'extrémité T_n de la première branche; l'ensemble des branches qui se seront présentées formera un premier groupe, auquel correspondra la première période. On partira ensuite d'une branche non comprise dans le groupe déjà séparé et on répétera les opérations précédentes jusqu'à ce qu'on trouve un nouveau circuit fermé, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les branches réelles.

On fera de même relativement aux branches de l'enveloppe imaginaire et à leurs asymptotes.

Les périodes ainsi obtenues viendront s'ajouter à celles qui auraient déjà été signalées par la présence d'anneaux fermés de la courbe réelle et de l'enveloppe imaginaire des conjuguées, ou les reproduiront.

Il est évident, en premier lieu, que la différence entre la somme des longueurs totales des arcs d'un même groupe et la somme des longueurs totales des asymptotes correspondantes sera toujours finie, car, à une distance assez petite d'une de ses asymptotes, l'élément d'une courbe ne diffère plus que par un infiniment petit d'ordre supérieur de l'élément correspondant de cette asymptote.

D'un autre côté, il est facile de voir qu'une courbe de degré quelconque, dans les environs de son asymptote, se confond avec une hyperbole du second degré, et par suite que celles de ses conjuguées dont les cordes réelles font un très-petit angle avec cette asymptote se confondent avec les ellipses conjuguées de cette hyperbole, de sorte que l'asymptote elle-même est une conjuguée elliptique de la courbe, dans un état limite et est représentée par les solutions imaginaires infinies de l'équation de la courbe, absolument comme l'asymptote d'une hyperbole.

En effet, si l'on prend l'asymptote considérée pour axe des y, l'équation de la courbe pourra se mettre, dans le cas général, qui est celui où nous raisonnons, sous la forme

$$y = \frac{A}{x} + \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ n'ayant que des valeurs finies pour $x = 0$. Or, 1°, cette équation donnera

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A}{x^2} + \varphi'(x),$$

$\varphi'(x)$ restant aussi fini pour $x = 0$, par conséquent l'élément de la courbe sera

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{\frac{A^2}{x^4} + \ldots};$$

d'un autre côté l'élément de l'asymptote correspondant à l'élément dy de l'ordonnée sera

$$d\sigma = (y)_x - (y)_{x+dx} = \frac{A}{x} + \varphi(x) - \frac{A}{x+dx} - \varphi(x+dx) = \frac{A}{x^2} + \ldots;$$

$\frac{ds}{d\sigma}$ tendra donc vers 1.

2°, dans les environs de $x = 0$, l'ordonnée de la courbe

$$y = \frac{A}{x} + \varphi(x)$$

se réduira à $\frac{A}{x}$, c'est-à-dire à l'ordonnée de l'hyperbole du second degré

$$xy = A,$$

soit que x soit réel ou imaginaire, pourvu que son module tende vers zéro. La courbe se confondra donc avec l'hyperbole du second degré et ses conjuguées avec celles de cette hyperbole, de sorte queles démonstrations qui se rapportaient à l'hyperbole s'étendront d'elles-mêmes à la courbe de degré quelconque. Car on sait d'ailleurs que l'enveloppe ima-

ginaire des conjuguées a toujours les mêmes asymptotes que la courbe réelle.

Quant au fait de l'échange des mêmes périodes réelles et imaginaires, lorsque l'on échange une courbe et l'enveloppe imaginaire de ses conjuguées réalisée, si on n'avait eu en vue que d'en obtenir la démonstration, on y serait parvenu plus simplement de la manière suivante.

Si l'on désigne par z la fonction de x

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

relative à un lieu $f(x, y)=0$, la quadratrice de la courbe dont l'ordonnée serait z sera la rectificatrice de celle dont l'ordonnée était y. Or, suivant que le point $[x, y]$ appartiendra à l'enveloppe réelle ou à l'enveloppe imaginaire du lieu $f(x, y) = 0$, z et x seront tous deux réels, ou bien z sera réel et x imaginaire : par conséquent le lieu des points $[z, x]$ correspondant à l'enveloppe imaginaire du lieu $f(x, y)=0$ ne sera autre chose que la conjuguée à z réels du lieu des points $[z, x]$ correspondant à l'enveloppe réelle. Par conséquent, d'après la remarque du n° 373, les périodes de la quadratrice de l'une de ces courbes seront les produits par $\sqrt{-1}$ des périodes de la quadratrice de l'autre.

Aperçu sur les intégrales des équations différentielles qui contiennent à la fois la fonction et la variable.

376. Sauf l'intégration même, les théories qui précèdent comprennent l'étude complète des équations différentielles du premier ordre où n'entre que la variable, c'est-à-dire qui peuvent recevoir la forme $f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)=0$.

Lorsque l'équation différentielle qu'on se propose d'intégrer contient à la fois la fonction y et la variable indépendante x, les périodes de l'intégrale peuvent dépendre de la constante qu'introduit l'intégration. Dans ce cas les valeurs de y qui correspondent à une même valeur de x sont bien toujours les termes de diverses progressions par différence ; mais les raisons de ces progressions ne sont plus des constantes absolues : elles dépendent, dans chacune des fonctions de x que représente y, de la valeur de cette fonction qui correspond à une même valeur initiale de x. Ainsi, si l'on prend pour expression de y en x la fonction qui représente l'aire indéfinie d'une courbe fermée, qu'on différentie l'équation posée entre y et x, et qu'entre l'équation intégrale et sa différentielle on élimine un des paramètres de la courbe en question, il est clair que l'intégrale générale de l'équation différentielle obtenue sera toujours la fonction de x qui représentait l'aire indéfinie considérée.

Mais le paramètre éliminé y sera représenté par la constante arbitraire introduite dans l'intégration, de sorte que la période de l'intégrale ne sera plus une constante absolue ; elle ne restera la même que dans une même suite de valeurs de y.

Prenons par exemple l'équation

$$y = \mathrm{CL}\frac{x}{a}$$

qui donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{C}}{x},$$

l'élimination de C fournira

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\mathrm{L}\frac{x}{a}} = \frac{\frac{dx}{x}}{\mathrm{L}\frac{x}{a}} = \frac{d\mathrm{L}\frac{x}{a}}{\mathrm{L}\frac{x}{a}};$$

et l'intégration donnera

$$\mathrm{L}y = \mathrm{L}\,.\,\mathrm{L}\frac{x}{a} + \mathrm{K} = \mathrm{L}\,.\,\mathrm{CL}\frac{x}{a},$$

d'où

$$y = \mathrm{CL}\frac{x}{a}.$$

Ainsi l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x\mathrm{L}\frac{x}{a}}$$

est simplement périodique. Mais la période de cette intégrale, $\pi\mathrm{C}\sqrt{-1}$, dépend de la constante arbitraire.

Cette constante C est l'une des valeurs de y qui correspondent à la valeur initiale de x, $x_0 = ae$, toutes les autres sont représentées par la formule

$$y_0 + n\pi y_0\sqrt{-1}.$$

Sur les équations différentielles du second ordre de la forme

$$f\left(x, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

377. Une première intégration d'une équation de cette forme fournirait une équation entre x et $\frac{dy}{dx}$,

$$\varphi\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

et, généralement, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée de cette équation pourrait être augmentée de multiples entiers quelconques de certaines périodes, ω, ω', ω'', etc., que les théories précédentes feront connaître.

$\frac{dy}{dx}$ pourrait donc être conçu sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}(x) + \mathrm{K}\omega + \mathrm{K}'\omega' + \mathrm{K}''\omega'' + \ldots,$$

par suite y serait représenté par

$$y = \int \mathrm{F}x\,dx + \mathrm{K}\omega x + \mathrm{K}'\omega' x + \mathrm{K}''\omega'' x + \ldots$$

Nous donnerons plus loin les conditions que devrait remplir l'équation

$$f\left(x, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

pour que la première intégrale

$$\varphi\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

fût algébrique. Si ces conditions étaient remplies, la fonction y rentrerait dans le cas de celles que nous avons examinées jusqu'ici.

CHAPITRE XXXIII

THÉORIES DES FONCTIONS CIRCULAIRES ET EXPONENTIELLES

Théorie des fonctions circulaires.

378. L'incohérence des diverses parties de la théorie des fonctions circulaires, telle qu'elle est aujourd'hui constituée, est trop universellement reconnue pour qu'il y ait lieu d'y insister. Nous nous abstiendrons donc d'une critique superflue.

Les théories qui précèdent fournissent le moyen d'établir rationnellement celle des fonctions circulaires. Nous croyons devoir donner au moins le sommaire de cette nouvelle théorie.

379. Si l'on désigne par S la valeur de l'intégrale

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

l'équation

$$S = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

établit entre y et S une relation par suite de laquelle chacune de ces variables devient fonction de l'autre : y est le sinus de S et S est l'arc dont le sinus est y.

Si l'on pose

$$x = \sqrt{1-y^2},$$

x est le cosinus de S, et S est l'arc dont le cosinus est x.

x et y satisfaisant à l'équation

$$y^2 + x^2 = 1$$

sont les coordonnées d'un point du cercle $y^2 + x^2 = 1$, ou de l'une de ses conjuguées.

Si l'on pose

$$z=\frac{y}{x} \quad \text{et} \quad u=\frac{x}{y},$$

z et u sont la tangente et la cotangente de S, et S est l'arc dont la tangente est z, ou dont la cotangente est u.

Enfin si l'on pose

$$v=\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{et} \quad w=\frac{1}{y},$$

v et w sont la sécante et la cosécante de S, et S est l'arc dont la sécante est v, ou dont la cosécante est w.

380. Les formules précédentes donnent immédiatement

$$\sin^2 S+\cos^2 S=1,$$

$$\text{tang } S=\frac{\sin S}{\cos S},$$

$$\text{cotang } S=\frac{1}{\text{tang } S}=\frac{\cos S}{\sin S},$$

$$\text{séc } S=\frac{1}{\cos S},$$

$$\text{coséc } S=\frac{1}{\sin S};$$

$$\sin S=\frac{\text{tang } S}{\sqrt{1+\text{tang}^2 S}} \quad \text{et} \quad \cos S=\frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2 S}}.$$

L'intégrale

$$S=\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

peut être transformée en

$$\int_0^y \frac{(1-y^2+y^2)\,dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

ou

$$\int_0^y dy\sqrt{1-y^2}+\int_0^y \frac{y^2dy}{\sqrt{1-y^2}};$$

d'un autre côté

$$\int_0^y \frac{y^2dy}{\sqrt{1-y^2}}=-\int_0^y \frac{-2ydx}{2\sqrt{1-y^2}}\,y,$$

et, en intégrant par parties,

$$-\left[y\sqrt{1-y^2}\right]_0^y + \int_0^y dy\,\sqrt{1-y^2};$$

par conséquent

$$S = -y\sqrt{1-y^2} + 2\int_0^y dy\,\sqrt{1-y^2}.$$

L'intégrale $\int dy\,\sqrt{1-y^2}$ est celle qui donne l'aire du cercle

$$y^2 + x^2 = 1$$

et de ses conjuguées.

Par suite, il est facile de savoir ce qu'est S.

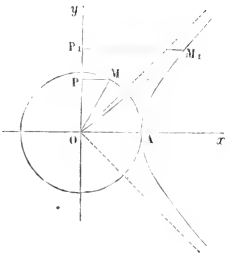


Fig. 26.

Si y est réel et moindre que 1, y et x sont les coordonnées OP et PM d'un point M du cercle OA, $2\int_0^y dy\,\sqrt{1-y^2}$ est le double de l'aire du segment AMPO et $y\sqrt{1-y^2}$ est le doubiede l'aire du triangle OPM; par conséquent S, ou $-y\sqrt{1-y^2} + 2\int_0^y dy\,\sqrt{1-y^2}$, est le double de l'aire du secteur OAM compris entre le rayon origine OA et le rayon mené au point $[x, y]$.

Si y est imaginaire sans partie réelle, x est réel mais plus grand que 1, et S est imaginaire sans partie réelle, puisque tous les éléments de

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

sont imaginaires sans parties réelles.

x et y sont alors les coordonnées d'un point M_1 de l'hyperbole OA

considérée comme conjuguée du cercle. $2\int_0^y dy\sqrt{1-y^2}$ est le produit par $\sqrt{-1}$ du double de l'aire du segment AM_1P_1O et $y\sqrt{1-y^2}$ est le produit par $\sqrt{-1}$ du double de l'aire du triangle OP_1M_1; de sorte que S, ou $-y\sqrt{1-y^2}+2\int_0^y dy\sqrt{1-y^2}$, est le produit par $\sqrt{-1}$ du double de l'aire du secteur OAM_1 compris entre le rayon origine OA et le rayon mené au point $[x, y]$.

Si y est l'ordonnée, en partie réelle et en partie imaginaire, d'un point M_2 de la conjuguée ayant OB pour axe transverse,

$$\int_0^y dy\sqrt{1-y^2}$$

se composera de l'intégrale $\int dy\sqrt{1-y^2}$ prise de zéro à l'ordonnée du point B, ou de l'aire du segment ABCO du cercle et de l'intégrale $\int dy\sqrt{1-y^2}$ prise de l'ordonnée du point B à l'ordonnée du point M_2.

Les ordonnées de la conjuguée à laquelle appartient le point M_2 de-

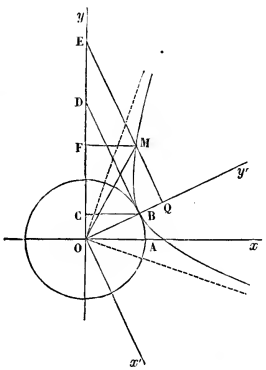


Fig. 27.

viendraient réelles si l'on donnait à l'axe des x la direction Ox' perpendiculaire à OB; par conséquent l'intégrale $\int dy\sqrt{1-y^2}$, prise de l'ordonnée du point B à celle du point M_2, se composera de l'aire réelle BQED, moins l'aire BQM_2, affectée du signe $\sqrt{-1}$, plus l'aire réelle du triangle DCB, moins l'expression analytique de l'aire du triangle EM_2F.

Réductions faites, on trouvera

$$S = 2 \text{ secteur AOB} + 2 \text{ secteur BOM}_2 \sqrt{-1},$$

c'est-à-dire que l'arc dont le sinus est y est le double du secteur du cercle $y^2 + x^2 = 1$, compris entre le rayon origine, couché sur l'axe des x, et l'axe transverse de la conjuguée à laquelle appartient le point $[x, y]$, plus le produit par $\sqrt{-1}$ du double du secteur de la même conjuguée, compris entre ce même axe transverse et le rayon mené au point $[x, y]$.

381. Si le point $[x, y]$, partant d'un point $[x_0, y_0]$, passe d'une conjuguée à la suivante, de manière que l'axe transverse de celle-ci effectue un tour entier, la partie réelle de S augmente de 2π, et si d'ailleurs le point $[x, y]$ revient au point de départ $[x_0, y_0]$, la partie imaginaire de S redevient ce qu'elle était d'abord.

Cela veut dire que si S augmente de 2π, sin S et cos S restent les mêmes.

Si le point $[x, y]$ va se placer au point diamétralement opposé à $[x_0, y_0]$, c'est-à-dire s'il vient au point $[-x_0, -y_0]$, S augmente de π, mais $\frac{y}{x}$ et $\frac{x}{y}$ ne changent pas.

Cela veut dire que si S augmente de π, tang S et cotang S restent les mêmes; quant à séc S et à coséc S, qui sont les inverses de cos S et de sin S, elles restent les mêmes lorsque S augmente de 2π.

382. La figure fournit évidemment les formules

$$\begin{aligned}
\sin(-S) &= -\sin S, \\
\cos(-S) &= \cos S, \\
\operatorname{tang}(-S) &= -\operatorname{tang} S, \\
\operatorname{cotang}(-S) &= -\operatorname{cotang} S;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\pi - S) &= \sin S, \\
\cos(\pi - S) &= -\cos S, \\
\operatorname{tang}(\pi - S) &= -\operatorname{tang} S, \\
\operatorname{cotang}(\pi - S) &= -\operatorname{cotang} S;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm S\right) &= \cos S, \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm S\right) &= \mp \sin S, \\
\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} \pm S\right) &= \mp \operatorname{tang} S, \\
\operatorname{cotang}\left(\frac{\pi}{2} \pm S\right) &= \mp \operatorname{cotang} S;
\end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi \pm S\right) = -\cos S,$$
$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi \pm S\right) = \mp \sin S,$$
$$\operatorname{tang}\left(\frac{3}{2}\pi \pm S\right) = \mp \operatorname{tang} S,$$
$$\operatorname{cotang}\left(\frac{3}{2}\pi \pm S\right) = \mp \operatorname{cotang} S.$$

383. *Dérivées des fonctions circulaires directes et inverses.*

$$\frac{dS}{dy} = D_y \arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

par conséquent

$$\frac{dy}{dS} = D_S \sin S = \sqrt{1-y^2} = x = \cos S.$$

$$\frac{dS}{dx} = D_x \arccos x = \frac{dS}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}}$$
$$= \frac{1}{-y} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}},$$

par conséquent

$$\frac{dx}{dS} = D_S \cos S = \frac{dS}{dy}\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2} = -y = -\sin S.$$

384. *Développements des fonctions circulaires en séries.* — Les dérivées successives de sin S étant

$$\cos S, \quad -\sin S, \quad -\cos S, \quad +\sin S, \quad +\cos S, \quad \text{etc.},$$

qui se réduisent, pour $S = 0$, à

$$1, \quad 0, \quad -1, \quad 0, \quad +1, \quad \text{etc.},$$

la formule de Maclaurin donne

$$\sin S = \frac{S}{1} - \frac{S^3}{1.2.3} + \frac{S^5}{1.2.3.4.5} - \frac{S^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

De même, les dérivées de cos S étant

$$-\sin S, \quad -\cos S, \quad +\sin S, \quad +\cos S, \quad \text{etc.},$$

qui se réduisent, pour $S = 0$, à

$$0, \quad -1, \quad 0, \quad +1, \quad \text{etc.},$$

$$\cos S = 1 - \frac{S^2}{1.2} + \frac{S^4}{1.2.3.4} - \frac{S^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

385. *Formules relatives à l'addition des aires.* — On démontrera, comme on le fait en trigonométrie élémentaire, les formules qui donnent $\sin(S \pm S_1)$, $\cos(S \pm S_1)$ et $\operatorname{tang}(S \pm S_1)$ pour des valeurs réelles de S et S_1.

La formule

$$\sin(S + S_1) = \sin S \cos S_1 + \cos S \sin S_1$$

se traduit par

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^{y\sqrt{1-y_1^2}+y_1\sqrt{1-y^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Cette équation étant satisfaite, quels que soient y et y_1, est une identité, on peut donc y supposer y et y_1 imaginaires, par conséquent

$$\sin(S + S_1) = \sin S \cos S_1 + \cos S \sin S_1,$$

quels que soient S et S_1. On démontrerait de même que les autres formules, relatives à l'addition des aires, sont générales.

Toutes les autres formules de trigonométrie se tirant des précédentes, il est inutile de les passer ici en revue.

Théorie des fonctions exponentielle et logarithmique.

386. Voici comment nous pensons que devrait être rétablie la théorie des fonctions exponentielle et logarithmique.

Soit

$$S = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

Cette équation fait S et x fonctions l'un de l'autre. S est le logarithme népérien de x ou Lx.

$\int \frac{dx}{x}$ est la quadratrice de l'hyperbole $xy = 1$, rapportée à des axes rectangulaires. Celle des conjuguées de cette hyperbole qui a ses cordes réelles parallèles à $y = -x$, est le cercle

$$y^2 + x^2 = 2$$

et le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire 2π de cette conjuguée est une période de l'intégrale quadratrice. Par conséquent

$$\int_1^x \frac{dx}{x}$$

a, pour chaque valeur de x, une infinité de valeurs en progression arithmétique, dont la raison est $2\pi\sqrt{-1}$, ou, ce qui revient au même, x, considéré comme fonction de S, ne change pas lorsque S augmente de $2\pi\sqrt{-1}$.

387. Si l'on suppose que y soit une fonction de x, assujettie seulement à prendre la valeur 1 lorsque x prend lui-même cette valeur,

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \frac{dy}{y}$$

peut s'écrire

$$\int_1^x \left[\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right],$$

ou

$$\int_1^x \frac{ydx + xdy}{xy},$$

ou encore

$$\int_1^x \frac{d(xy)}{xy},$$

de sorte que

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \frac{dy}{y} = \int_1^x \frac{d(xy)}{xy},$$

ce qui signifie que

$$\mathrm{L}x + \mathrm{L}y = \mathrm{L}(xy);$$

mais la fonction y restant complétement arbitraire, y est en définitive quelconque par rapport à x, par conséquent *le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs*, quels que soient ces facteurs. On en conclut immédiatement

$$\mathrm{L}\frac{x}{y} = \mathrm{L}x - \mathrm{L}y,$$

$$\mathrm{L}x^m = m\mathrm{L}x,$$

$$\mathrm{L}x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\mathrm{L}x,$$

$$\mathrm{L}x^{-\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\mathrm{L}x.$$

388. La valeur de $\int \frac{dx}{x}$, prise de 1 à un nombre négatif $-x$, c'est-à-dire l'aire de la courbe $y = \frac{1}{x}$ comprise entre les ordonnées de A et de M_1, symétrique de M, par rapport au centre, est la demi-aire de

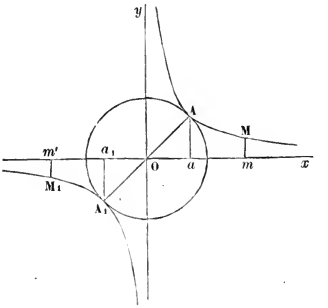


Fig. 28.

la conjuguée circulaire décrite sur AA_1, comme diamètre, affectée du signe $\sqrt{-1}$, plus l'aire du segment compris entre les ordonnées de A_1 et de M_1; car l'aire du diamètre AA_1 est identiquement nulle comme composée de

$$-OAa + OA_1a_1;$$

d'un autre côté, la symétrie de la figure donne évidemment

$$\int_{-1}^{-x} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{x} \frac{dx}{x};$$

il en résulte que

$$L(-x) = (2K + 1)\pi\sqrt{-1} + L(x).$$

389. Si l'on donne à x une valeur imaginaire $\beta\sqrt{-1}$, la valeur correspondante de y est $-\frac{1}{\beta}\sqrt{-1}$, x et y sont les coordonnées d'un des points de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu, c'est-à-dire de l'hyperbole $xy = -1$, qui est représentée en pointillés sur la figure.

Soit M_2 ce point, la conjuguée qui touche l'enveloppe imaginaire en M_2, touche la courbe réelle au point M, dont l'abscisse est $-\beta$.

Or

$$\int_A^{M_2} \frac{dx}{x} = \int_A^{M_2} \frac{dx}{x} + \int_M^{M^2} \frac{dx}{x};$$

mais $\int_A^M \frac{dx}{x}$ est $L(-\beta)$, et quant à $\int_M^{M_2} \frac{dx}{x}$, c'est le quart de l'aire de la

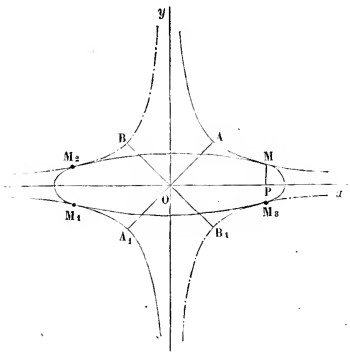


Fig. 29.

conjuguée $MM_2M_1M_3$, affectée du signe $\sqrt{-1}$, ou $\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$; par conséquent

$$\int_1^{\beta\sqrt{-1}} \frac{dx}{x} = L(-\beta) + \left(2K + \frac{1}{2}\right)\pi\sqrt{-1},$$

ou

$$\int_1^{x\sqrt{-1}} \frac{dx}{x} = Lx + \left(2K + \frac{1}{2}\right)\pi\sqrt{-1};$$

c'est-à-dire

$$Lx\sqrt{-1} = Lx + \left(2K + \frac{1}{2}\right)\pi\sqrt{-1}.$$

390. Passons à la fonction inverse, ou à la fonction de S représentée par x.

En vertu de l'équation $Lx^m = mLx$, si x croît en progression par quotient à partir de 1, S croît en progression par différence à partir de zéro. Par conséquent, les valeurs de x et de S sont représentées dans les deux suites

Valeurs de x... 1, $(1+\alpha)$, $(1+\alpha)^2$, $(1+\alpha)^3$, ...
Valeurs de S... 0, β, 2β, 3β, ...

mais les accroissements naissants de x et de S, à partir de 1 pour x et de 0 pour S, sont d'abord égaux, puisque

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{x},$$

par conséquent, si, dans les progressions précédentes, on suppose α et β infiniment petits, il faudra faire β égal à α. Les valeurs de x et de S sont donc

Valeurs de x... 1, $(1+\alpha)$, $(1+\alpha)^2$, $(1+\alpha)^3$, ...
Valeurs de S... 0, α, 2α, 3α, ...

Supposons α réel, et soit $n\alpha = 1$, si $S = 1$, x aura pour valeur $(1+\alpha)^n$ ou $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ et si l'on pose $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, d'où $(1+\alpha) = e^{\alpha}$, les valeurs de x et de S seront

Valeurs de x... 1, e^{α}, $e^{2\alpha}$, $e^{3\alpha}$, ...
Valeurs de S... 0, α, 2α, 3α, ...

de sorte que tant que x et S seraient réels, la relation entre x et S pourrait être formulée par

$$x = e^{S}.$$

Si S devient imaginaire, le symbole e^{S} devenant libre, on le conserve pour représenter la valeur de x, sachant d'ailleurs que l'exposant S, bien qu'imaginaire, jouit encore des propriétés des exposants réels, c'est-à-dire que

$$e^{S} e^{S_1} = e^{S+S_1}$$

comme cela a été établi plus haut.

e prend le nom de base du système des logarithmes considérés jusqu'ici. C'est la limite vers laquelle tend $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ lorsque α tend vers zéro; cette limite, que fournit la formule du binome, est

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots.$$

391. *Dérivées de* e^{S}. — L'équation

$$S = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

donne

$$\frac{d\mathrm{S}}{dx} = \frac{1}{x},$$

d'où

$$\frac{dx}{d\mathrm{S}} = x,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{D_S}\, e^{\mathrm{S}} = e^{\mathrm{S}};$$

toutes les dérivées de e^{S} sont donc égales à e^{S}, elles se réduisent à 1 pour $\mathrm{S} = 0$; par conséquent, la formule de Maclaurin donne, quelque soit S, réel ou imaginaire,

$$e^{\mathrm{S}} = 1 + \frac{\mathrm{S}}{1} + \frac{\mathrm{S}^2}{1.2} + \frac{\mathrm{S}^3}{1.2.3} + \ldots.$$

392. Nous terminerons en remarquant que l'identité effective des fonctions exponentielles et circulaires qui ne résulte, dans l'enseignement usuel, que d'un rapprochement fortuit, et dont en fait l'explication véritable est à peine entrevue, résulte au contraire immédiatement de ce que les intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, ou arc sin x, et $\int \frac{dx}{x}$, ou Lx, étant la première la quadratrice du cercle et, par conséquent, des hyperboles équilatères ses conjuguées, et la seconde la quadratrice de l'hyperbole équilatère et, par conséquent, de sa conjuguée circulaire, ces deux intégrales devaient se ramener l'une à l'autre par une transformation de coordonnées et par une substitution de valeurs imaginaires des variables et de leurs fonctions, à des valeurs réelles.

CHAPITRE XXXIV

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

De la fonction λ.

393. Si l'on désigne par s l'intégrale

$$s = \int_0^x \frac{dx}{g\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}},$$

x sera une fonction de s; cette fonction se note sous la formule

$$x = \lambda\,(s, g, k).$$

C'est la principale des fonctions elliptiques; elle se réduit à sin gs pour

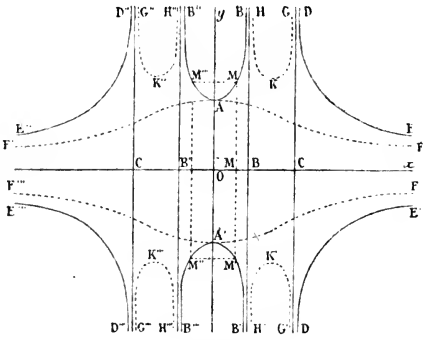


Fig. 30.

$k = 0$, g en est le paramètre et k le module; que g et k soient réels ou imaginaires, les propriétés essentielles de la fonction restent les mêmes

dans les deux cas; on pourra donc, dans la recherche de ces propriétés, admettre la première hypothèse.

On peut, si l'on veut, supposer $k < 1$: en effet, si dans

$$s = \int_0^x \frac{dx}{g\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

on pose $x = \frac{z}{k}$, il viendra

$$s = \int_0^z \frac{dz}{kg\sqrt{\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)(1-z^2)}},$$

de sorte que le module sera devenu inverse, à la condition que le paramètre ait été multiplié par la valeur de k primitivement plus grande que 1.

La courbe dont s est l'aire a pour équation

$$y = \frac{1}{g\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

g et k étant supposés réels, cette courbe a la forme

$$BAB''B'A'B'''DED'E'D''E''D'''E''';$$

la conjuguée à abscisses réelles est

$$GHG'H'G''H''G'''H'''$$

et celle qui a ses ordonnées réelles est

$$FAF''F'A'F'''.$$

OB_1 et OG représentent respectivement 1 et $\frac{1}{k}$ ou $\frac{1}{k}$ et 1, selon que k est moindre ou plus grand que 1.

La courbe est du sixième degré; il en résulte qu'une conjuguée quelconque est comprise tout entière entre les tangentes menées parallèlement à ses cordes réelles, aux deux branches D''E'' et D'E', ou aux deux branches D'''E''' et DE, suivant que la caractéristique de cette conjuguée est positive ou négative; car les parallèles à ces tangentes, qui ne sont pas comprises entre elles, coupent toutes la courbe en six points réels.

On peut encore mener à la courbe réelle, parallèlement à une direction donnée, deux autres tangentes qui la touchent sur les branches B''AB et B'''A'B' et les parallèles à ces tangentes, qui sont comprises entre elles, ne coupent plus la courbe qu'en deux points réels. Chaque

conjuguée est donc composée de deux anneaux séparés, compris l'un entre E″D″ et B‴A′, et l'autre entre AB et D′E′, ou bien l'un entre E‴D‴ et B″A, et l'autre entre B′A′ et DE.

L'origine est le centre commun de la courbe réelle et de chacune de ses conjuguées.

Nous désignerons souvent, dans ce qui va suivre, le radical par R.

L'intégrale s admet évidemment pour périodes réelles l'aire

$$BAB''B'A'B'',$$

c'est-à-dire, suivant que k est plus petit ou plus grand que 1,

$$4\int_0^1 \frac{dx}{g\mathrm{R}} \quad \text{ou} \quad 4\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{g\mathrm{R}},$$

et l'aire finie DEE′D′D‴E‴E″D″, c'est-à-dire, dans les mêmes hypothèses,

$$4\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dx}{g\mathrm{R}} \quad \text{ou} \quad 4\int_1^{\infty} \frac{dx}{g\mathrm{R}}.$$

Mais ces deux aires sont égales; en effet, si l'on pose $x = \frac{1}{z}$,

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dx}{g\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

devient

$$-\int_k^0 \frac{\frac{dz}{z^2}}{g\sqrt{\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\left(1-\frac{k^2}{z^2}\right)}}$$

ou

$$\int_0^k \frac{dz}{g\sqrt{(z^2-1)(z^2-k^2)}},$$

et si l'on pose $z = ku$, on trouve

$$\int_0^1 \frac{kdu}{g\sqrt{(k^2u^2-1)(k^2u^2-k^2)}} \quad \text{ou} \quad \int_0^1 \frac{du}{g\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

On ferait voir de même que

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{g\mathrm{R}} = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{g\mathrm{R}}.$$

Ainsi les deux périodes réelles, quoique distinctes au point de vue géométrique, n'en font qu'une au point de vue analytique.

L'intégrale s admet de même, pour périodes imaginaires, les produits par $\sqrt{-1}$ des aires égales GKHG'K'H' et G''K''H''H'''K'''G''', c'est-à-dire

$$2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{g\mathrm{R}}.$$

Du reste, la période imaginaire serait aussi bien le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire intérieure constante d'un des anneaux composant une conjuguée quelconque, ou encore l'aire finie comprise entre l'axe des x et l'une des branches FAF'' ou F'A'F''' de la conjuguée à abscisses réelles. Ces faits peuvent être énoncés sans démonstrations, puisque les conjuguées GKHG'K'H'G''K''H''G'''K'''H''' et FAF''F'A'F''' ne sont autre chose que les limites, dans deux sens opposés, des conjuguées composées de deux anneaux fermés, dont l'aire est constante.

Ainsi les deux seules périodes de l'intégrale sont

$$\omega = 4\int_0^1 \frac{dx}{g\mathrm{R}} \quad \text{ou} \quad \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{g\mathrm{R}}$$

et

$$\omega' = 2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{g\mathrm{R}}.$$

Nous avons jusqu'ici exprimé les périodes dans les deux hypothèses $k < 1$ et $k > 1$; mais l'alternative peut être complétement écartée, car, dans la seconde hypothèse, on pourrait, aux périodes

$$4\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{g\mathrm{R}} \quad \text{et} \quad 2\int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{dx}{g\mathrm{R}},$$

substituer

$$-2\int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{dx}{g\mathrm{R}} \quad \text{et} \quad 4\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{g\mathrm{R}} - 4\int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{dx}{g\mathrm{R}},$$

c'est-à-dire

$$2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{g\mathrm{R}} \quad \text{et} \quad 4\int_0^1 \frac{dx}{g\mathrm{R}}.$$

Ainsi l'on pourra prendre, dans les deux cas, pour périodes,

$$\omega = 4\int_0^1 \frac{dx}{g\mathrm{R}} \quad \text{et} \quad \omega' = 2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{g\mathrm{R}},$$

et, quel que soit s, on aura

$$\lambda(s, g, k) = \lambda(s + m\omega + n\omega', g, k), \tag{1}$$

m et n désignant des nombres entiers quelconques.

C'est, au reste, la période ω qui se réduit à 2π lorsque la fonction λ se réduit à $\sin gs$.

394. La fonction λ est impaire, c'est-à-dire que

$$\lambda(s, g, k) = -\lambda(-s, g, k); \tag{2}$$

en effet, la figure montre que x et s changent en même temps de signes, sans changer de valeurs.

x et s partent en même temps de zéro; par conséquent

$$\lambda(0, g, k) = 0,$$

ou, plus généralement,

$$\lambda(m\omega + n\omega', g, k) = 0. \tag{3}$$

Pour trouver les autres valeurs de s qui annulent λ, on remarquera que, si le point $[x, y]$ suit le chemin ABB'A', l'intégrale aura crû de $\frac{\omega}{2}$, x étant redevenu nul.

Il en résulte que

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2}, g, k\right) = 0,$$

ou, plus généralement,

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2} + m\omega + n\omega', g, k\right) = 0. \tag{4}$$

Les formules précédentes sont les analogues de

$$\sin(2k\pi + s) = \sin s, \quad \sin(-s) = -\sin s, \quad \sin 2k\pi = 0, \quad \sin(2k+1)\pi = 0.$$

Si le point $[x, y]$ suit successivement les deux chemins AM et AMBB'A'M'', les deux valeurs de l'intégrale diffèrent de $\frac{\omega}{2}$ et x a seulement changé de signe; par conséquent

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2} + s, g, k\right) = -\lambda(s, g, k);$$

ou, plus généralement,

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2} + m\omega + n\omega' + s, g, k\right) = -\lambda(s, g, k). \tag{5}$$

Cette formule est l'analogue de

$$\sin(\pi + s) = -\sin s.$$

Si le point $[x, y]$ suit successivement les deux chemins AM et AMBB'M', les deux valeurs de l'intégrale forment une somme égale à $\frac{\omega}{2}$ et les x sont égaux; par conséquent

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2} - s, g, k\right) = \lambda(s, g, k),$$

ou, plus généralement,

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2} + m\omega + n\omega' - s, g, k\right) = \lambda(s, g, k); \tag{6}$$

cette formule est l'analogue de

$$\sin(\pi - s) = \sin s.$$

Pour terminer ce qui concerne la période ω, il reste à remarquer que si le point $[x, y]$ est arrivé en B, de manière que s soit égal à $\frac{\omega}{4}$, et que l'on augmente s ou qu'on le diminue d'une même quantité, aire $B'M'M_1B_1$ ou aire BMM_1B_1, x, dans les deux cas, prend la même valeur. Il en est de même si le point $[x, y]$ est arrivé en B''. Il en résulte

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4} + s, g, k\right) = \lambda\left(\frac{\omega}{4} - s, g, k\right) \tag{7}$$

et

$$\lambda\left(\frac{3}{4}\omega + s, g, k\right) = \lambda\left(\frac{3}{4}\omega - s, g, k\right). \tag{8}$$

Ces formules sont les analogues de

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + s\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right)$$

et

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + s\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - s\right).$$

395. Nous avons déjà dit que le double de la période imaginaire ω' se retrouve dans l'aire FF″F‴F′ de la conjuguée à ordonnées réelles, affectée du signe $\sqrt{-1}$, c'est-à-dire que

$$\frac{\omega'}{2} = \sqrt{-1}\ \text{aire AFO}x = \int_0^\infty \frac{dx}{g\mathrm{R}}.$$

Ainsi,

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{2}, g, k\right) = \infty. \tag{9}$$

Si le point $[x, y]$ suit le chemin ABHKGDE, l'aire engendrée est $\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{4}$ ou $\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}$; par conséquent $\int_0^\infty \frac{dx}{g\mathrm{R}}$ a aussi pour valeur $\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}$, de sorte que

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}, g, k\right) = \infty; \tag{10}$$

mais $\lambda\left(\frac{\omega'}{2}, g, k\right)$ est imaginaire sans partie réelle, tandis que $\lambda\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}, g, k\right)$ est réel.

Ainsi les valeurs de s qui rendent λ infini, sont

$$\frac{\omega'}{2} + m\omega + n\omega'$$

et

$$\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2} + m\omega + n\omega'.$$

Nous avions déjà trouvé que celles qui le rendent nul sont

$$m\omega + n\omega'$$

et

$$\frac{\omega}{2} + m\omega + n\omega';$$

on voit que la somme de deux valeurs du premier genre est

$$\frac{\omega}{2} + m\omega + n\omega'$$

comme la somme de deux valeurs du second ; c'est-à-dire, que la somme

de deux valeurs de s, non réductibles l'une à l'autre, qui rendent λ nul, est réductible à la somme de deux de ses valeurs, non réductibles l'une à l'autre, qui donnent λ infini.

On sait que cette propriété est caractéristique des fonctions doublement périodiques bien déterminées.

En appelant a et b les termes généraux des deux séries de valeurs de s qui rendent λ nul, α et β les termes généraux des deux séries de valeurs qui rendent λ infini, on a

$$a + b = \alpha + \beta + m\omega + n\omega'. \tag{11}$$

396. Si le point $[x,y]$ suit le chemin AMBHKG, s prend la valeur $\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}$ et $x = \frac{1}{k}$, par conséquent

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2} + m\omega + n\omega', g, k\right) = \frac{1}{k}. \tag{12}$$

Si dans l'équation

$$s = \int_0^x \frac{dx}{g\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

on pose $x = \frac{1}{kx'}$, il vient

$$s = \int_\infty^{x'} \frac{\frac{-dx'}{k^2x'^2}}{g\sqrt{\left(1-\frac{1}{k^2x'^2}\right)\left(1-\frac{1}{x'^2}\right)}}$$

$$= \int_\infty^{x'} \frac{-dx'}{g\sqrt{(1-x'^2)(1-k^2x'^2)}}$$

$$= \int_\infty^0 \frac{-dx'}{g\sqrt{(1-x'^2)(1-k^2x'^2)}} + \int_0^{x'} \frac{-dx'}{g\sqrt{(1-x'^2)(1-k^2x'^2)}};$$

mais

$$\int_\infty^0 \frac{-dx'}{g\mathrm{R}} = \int_0^\infty \frac{dx'}{g\mathrm{R}} = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2},$$

c'est la valeur que prend l'intégrale quand x croît par valeurs réelles jusqu'à l'infini réel et positif; par conséquent, si l'on avait posé $s = s' + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}$, en même temps que $x = \frac{1}{kx'}$, on aurait trouvé

$$s' = \int_0^{x'} \frac{-dx'}{g\sqrt{(1-x'^2)(1-k^2x'^2)}},$$

c'est-à-dire que

$$x' = -\lambda(s', g, k),$$

ou

$$\frac{1}{kx} = -\lambda\left(s - \frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2}, g, k\right),$$

ou enfin

$$\lambda\left(s - \frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2}, g, k\right) = -\frac{1}{k\lambda(s, g, k)};$$

mais on a trouvé plus haut

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2} - s, g, k\right) = \lambda(s, g, k),$$

ou

$$\lambda\left(s - \frac{\omega}{2}, g, k\right) = -\lambda(s, g, k);$$

par conséquent

$$\lambda\left(s - \frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2}, g, k\right) = -\lambda\left(s - \frac{\omega'}{2}, g, k\right) = -\frac{1}{k\lambda(s, g, k)},$$

c'est-à-dire enfin

$$\lambda\left(s - \frac{\omega'}{2}, g, k\right) = \frac{1}{k\lambda(s, g, k)}. \tag{13}$$

397. La fonction λ est bien déterminée, c'est-à-dire qu'elle n'a qu'une seule valeur pour chaque valeur de s. Cela tient à ce que, toutes les conjuguées de la courbe yx étant fermées, à l'exception de celles qui sont tracées sur la figure, mais dont les aires sont finies, les deux parties réelle et imaginaire de s ne peuvent respectivement dépasser ω et ω' que par l'accumulation des périodes. Il en résulte que si l'on donne à s une valeur $A + B\sqrt{-1}$, on peut, en en retranchant ou y ajoutant les deux périodes, en nombres convenables, le réduire à une valeur $s = a + b\sqrt{-1}$, dans laquelle a et b soient par exemple positifs et respectivement moindres que ω et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans ω'. Si alors b est nul, le point $[y, \lambda]$ appartient nécessairement à l'une des branches BAB″ ou B′AB‴; car s'il était placé sur l'un des arcs

$$\text{DE, D′E′, D″E″, D‴E‴},$$

s aurait pour partie imaginaire $\pm\frac{\omega'}{2}$; le point $[y, \lambda]$ est d'ailleurs tel que M, ou M′, ou M″, ou M‴, suivant que a est moindre que $\frac{\omega}{4}$ compris entre $\frac{\omega}{4}$ et $\frac{\omega}{2}$, entre $\frac{\omega}{2}$ et $3\frac{\omega}{4}$, ou enfin entre $3\frac{\omega}{4}$ et ω. Si a est nul, le

point $[y, \lambda]$ appartient à l'un des arcs F″AF, F′A′F‴; il se trouve d'ailleurs sur AF, ou sur F′A′, suivant que b est moindre que $\frac{\omega'}{2}$, ou compris entre $\frac{\omega'}{2}$ et ω'. Pour qu'on pût le placer sur A′F‴ ou sur F‴A, il faudrait qu'on eût réduit B à être seulement moindre que $2\omega'$; alors le point $[y, \lambda]$ serait sur A′F‴, si b était compris entre ω' et $\frac{3}{2}\omega'$, et sur F‴A, si b était compris entre $\frac{3}{2}\omega'$ et $2\omega'$.

Nous avons déjà dit que les conjuguées dont la caractéristique est négative forment deux anneaux dont l'un est compris entre les branches DE et A′B′, et l'autre entre AB″ et D‴E‴. Les conjuguées dont la caractéristique est positive sont au contraire comprises entre AB et D′E′ d'une part, A′B‴ et D″E″ de l'autre. C'est d'ailleurs l'aire, affectée du signe $\sqrt{-1}$, de l'un de ces anneaux, qui est ω'.

Cela posé, si ni a ni b ne sont nuls, l'anneau auquel appartiendra le point $[y, \lambda]$ touchera AB, ou B′A′, ou A′B‴, ou B″A, suivant que a sera moindre que $\frac{\omega}{4}$, compris entre $\frac{\omega}{4}$ et $\frac{\omega}{2}$, ou entre $\frac{\omega}{2}$ et $3\frac{\omega}{4}$, ou enfin entre $3\frac{\omega}{4}$ et ω. D'ailleurs, ce point $[y, \lambda]$ se trouvera sur le premier, le second, le troisième ou le quatrième quadrant de l'anneau, suivant que b sera moindre que $\frac{\omega'}{4}$, compris entre $\frac{\omega'}{4}$ et $\frac{\omega'}{2}$, entre $\frac{\omega'}{2}$ et $3\frac{\omega'}{4}$, ou enfin entre $3\frac{\omega'}{4}$ et ω'. Ainsi la position de ce point sera déterminée dans tous les cas.

398. La fonction λ dont nous venons de nous occuper est la fonction mère des fonctions doublement périodiques bien déterminées; ses composées les plus simples sont

$$\mu = \pm\sqrt{1-\lambda^2} \quad \text{et} \quad \nu = \pm\sqrt{1-k^2\lambda^2},$$

qui ne sont autres que des fonctions λ, de paramètres et de modules différents. En effet,

$$\frac{ds}{d\mu} = \frac{ds}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{1}{g\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}}\frac{-\mu}{\lambda};$$

si l'on élimine λ, il vient

$$\frac{ds}{d\mu} = \frac{\mp 1}{g\sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2(1-\mu^2))}} = \frac{\mp 1}{g\sqrt{1-k^2}\sqrt{(1-\mu^2)\left(1-\frac{k^2}{k^2-1}\mu^2\right)}},$$

ou

$$s = \int_{\pm 1}^{\mu} \frac{\mp\, d\mu}{g\sqrt{1-k^2}\,\sqrt{(1-\mu^2)\left(1-\frac{k^2}{k^2-1}\,\mu^2\right)}},$$

puisque $\lambda = 0$ correspond à $\mu = \pm 1$.

De même

$$\frac{ds}{d\nu} = \frac{ds}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\nu},$$

ou

$$\frac{ds}{d\nu} = \frac{1}{g\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}}\,\frac{-\nu}{k^2\lambda},$$

ou, en éliminant λ,

$$\frac{ds}{d\nu} = \frac{\mp 1}{gk^2\sqrt{\frac{1-\nu^2}{k^2}\,\frac{k^2-1+\nu^2}{k^2}}} = \frac{\mp 1}{g\sqrt{k^2-1}\,\sqrt{(1-\nu^2)\left(1-\frac{1}{1-k^2}\,\nu^2\right)}},$$

ou

$$s = \int \frac{\mp\, d\nu}{g\sqrt{k^2-1}\,\sqrt{(1-\nu^2)\left(1-\frac{1}{1-k^2}\,\nu^2\right)}}.$$

Les fonctions μ et ν ne sont donc que des fonctions λ de la même variable s, augmentée d'une constante, ayant respectivement pour paramètres, $g\sqrt{1-k^2}$ et $g\sqrt{k^2-1}$ et, pour modules, $\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}$ et $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$.

Ces deux fonctions ne seraient pas complétement définies par ce qui précède, puisque chacune d'elles serait affectée du double signe. Cela tient à ce qu'elles ne devaient pas être définies par rapport à λ, mais par rapport à s. Mais il suffira, pour lever l'indétermination, de se donner la valeur de chacune d'elles, pour une valeur particulière de la variable. Comme $\lambda(0) = 0$, $\mu(0)$ et $\nu(0)$ seraient égaux à ± 1, on fait $\mu(0) = +1$ et $\nu(0) = +1$. Il en résulte

$$s = -\int_{1}^{\mu} \frac{d\mu}{g\sqrt{1-k^2}\,\sqrt{(1-\mu^2)\left(1-\frac{k^2}{k^2-1}\,\mu^2\right)}}$$

et

$$s = -\int_{1} \frac{d\nu}{g\sqrt{k^2-1}\,\sqrt{(1-\nu^2)\left(1-\frac{1}{1-k^2}\,\nu^2\right)}}$$

ou

$$s = -\int_0^{\mu} \frac{d\mu}{g\sqrt{1-k^2}\sqrt{(1-\mu^2)\left(1-\frac{k^2}{k^2-1}\mu^2\right)}} + \int_0^{1} \frac{d\mu}{g\sqrt{1-k^2}\sqrt{(1-\mu^2)\left(1-\frac{k^2}{k^2-1}\mu^2\right)}}$$

et

$$s = -\int_0^{\nu} \frac{d\nu}{g\sqrt{k^2-1}\sqrt{(1-\nu^2)\left(1-\frac{1}{1-k^2}\nu^2\right)}} + \int_0^{1} \frac{d\nu}{g\sqrt{k^2-1}\sqrt{(1-\nu^2)\left(1-\frac{1}{1-k^2}\nu^2\right)}}.$$

Mais les intégrales définies

$$\int_0^{1} \frac{d\mu}{g\sqrt{1-k^2}\sqrt{(1-\mu^2)\left(1-\frac{k^2}{k^2-1}\mu^2\right)}}$$

et

$$\int_0^{1} \frac{d\nu}{g\sqrt{k^2-1}\sqrt{(1-\nu^2)\left(1-\frac{1}{1-k^2}\nu^2\right)}}$$

sont les quarts des premières périodes des fonctions μ et ν considérées comme des fonctions λ, de paramètres $g\sqrt{1-k^2}$ et $g\sqrt{k^2-1}$ et de modules $\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}$ et $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$. En les désignant par ω_1 et ω_2, on aura donc :

$$\mu(s, g, k) = \lambda\left(\frac{\omega_1}{4} - s, g\sqrt{1-k^2}, \frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\right)$$

et

$$\nu(s, g, k) = \lambda\left(\frac{\omega_2}{4} - s, g\sqrt{k^2-1}, \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\right).$$

399. Les fonctions $\mu(s, g, k)$ et $\nu(s, g, k)$ sont bien déterminées et doublement périodiques, puisqu'elles s'expriment par des fonctions λ. D'ailleurs, comme ce sont des fonctions de $\lambda(s, g, k)$, leurs périodes devront avoir avec celles de λ des relations simples, mais elles ne seront pas nécessairement identiques à celles de λ.

On reconnaît aisément que les périodes de μ sont ω et $\frac{\omega}{2} + \omega'$ et que celles de ν sont $\frac{\omega}{2}$ et $2\omega'$.

CHAPITRE XXXV

DES INTÉGRALES DOUBLES.

Des intégrales doubles prises entre des limites imaginaires.

400. La définition d'une intégrale double $\int\int z dx dy$, lorsque les variables dont elle dépend doivent passer par des valeurs imaginaires, était sujette à des difficultés que nous devons indiquer avant de passer outre.

Il est évident d'abord qu'une des sommes représentées dans la formule

$$\int\int z \,.\, dx \,.\, dy$$

ne se sépare des autres qu'autant qu'on fournit deux relations entre les parties réelles et imaginaires de x, y et z, qui, jointes aux deux équations dans lesquelles se décompose celle qui donne z implicitement, réduisent à deux le nombre des variables indépendantes.

Mais ces deux relations étant données, pour concevoir nettement l'intégrale double, il faudrait la transformer de manière à pouvoir y séparer les deux intégrations.

Or une pareille transformation exigerait habituellement un changement de variables indépendantes.

En effet, à un même couple de valeurs attribuées aux parties réelle et imaginaire soit de y, soit de x, il ne correspondra en général qu'un nombre limité de systèmes de valeurs soit de x et de z, soit de y et de z, puisque sur les six variables on en aura choisi deux et qu'il restera aux quatre autres à satisfaire à quatre conditions.

Pour pouvoir séparer les deux intégrations, il faudrait en général substituer des variables réelles aux variables imaginaires considérées.

On pourrait prendre pour variables indépendantes les parties α et β qui composent x, et l'on effectuerait la transformation au moyen de la formule de Jacobi.

Mais une pareille transformation, habituellement, altérerait trop pro-

fondément la forme analytique de la fonction placée sous le signe $\int$ pour laisser aucun moyen d'en étudier l'intégrale. Il vaudra donc mieux recourir à un autre moyen pour définir l'intégrale double.

Nous commencerons par déterminer, pour chaque système de limites, la valeur de l'intégrale la plus facile à rencontrer et à définir.

Les limites seront fournies par deux courbes réelles ou imaginaires composées de points pris sur la surface $F[x, y, z] = 0$, ou sur ses conjuguées, et la discussion portera sur les différentes hypothèses qu'on peut faire relativement à ces courbes.

401. Lorsque les deux courbes, qui forment les limites de l'intégrale, ont les ordonnées de tous leurs points réelles, on peut éviter de faire passer y par des valeurs imaginaires; alors l'intégrale double reçoit immédiatement la forme

$$\int dy \int z dx.$$

Mais les limites de chaque intégration étant fixées, si l'on n'indiquait pas de quelle manière, pour chaque valeur de y, x variera entre ses limites $\varphi(y)$ et $\psi(y)$, l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx$$

resterait en général complétement indéterminée. En effet, pour chaque valeur de y, $y = k$,

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx$$

pourrait avoir une infinité de valeurs qui seraient une quantité fixe augmentée de multiples entiers de quantités représentant les aires des anneaux fermés de la courbe

$$f(x, k, z) = 0,$$

les aires imaginaires des conjuguées fermées de cette courbe, ou les valeurs de l'intégrale $\int z dx$, prises le long des anneaux fermés de l'enveloppe imaginaire de ses conjuguées; en sorte que si la nature de la question ne spécifiait rien sur le nombre de chacune des périodes qu'il faudrait comprendre dans la valeur de l'intégrale

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx,$$

pour chaque valeur de y, l'élément

$$dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z\,dx,$$

renfermant une partie dans laquelle un coefficient, entier à la vérité, serait quelconque, comme cette partie serait toujours infiniment petite, l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z\,dx$$

pourrait recevoir une infinité de valeurs continues entre elles; tandis que si, au contraire, la marche des valeurs de x est fixée d'une manière générale, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de y, alors les valeurs de l'intégrale

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z\,dx$$

ne se formeront plus indépendamment les unes des autres, et l'intégrale double sera complétement définie.

Pour fixer la marche des valeurs de x entre ses limites correspondant à chaque valeur de y, on pourra définir d'une manière générale la courbe réelle ou imaginaire que, dans chaque plan parallèle au plan des xz, et distant de ce plan de la quantité y, le point $[x, z]$ devra décrire entre les limites $x = \varphi(y)$ et $x = \psi(y)$, pour engendrer l'aire

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z\,dx.$$

Soit toujours $y = k$ une des valeurs de y, le plan $y = k$ coupera la surface réelle et celles de ses conjuguées dont les ordonnées y sont réelles, suivant une courbe réelle et ses conjuguées imaginaires.

Si $x_0 = \varphi(k)$ et $x_1 = \psi(k)$ sont constamment réels, quel que soit k, on pourra ne donner à x que des valeurs réelles, et l'intégrale

$$\int_{\varphi(k)}^{\psi(k)} z\,dx$$

représentera la somme des aires des sections faites dans la surface réelle et dans sa conjuguée à abscisses et ordonnées réelles, comprises entre ces deux courbes, l'axe des x et les deux parallèles à l'axe des z,

$$x = \varphi(k), \qquad x = \psi(k).$$

Mais cette intégrale aura d'ailleurs autant de valeurs qu'il y aura de chemins continus sur ces deux courbes, des divers points qui peuvent

répondre à la limite inférieure $x_0 = \varphi(k)$, aux points qui peuvent répondre à la limite supérieure $x_1 = \psi(k)$.

Si x peut aller de $x_0 = \varphi(k)$ à $x_1 = \psi(k)$ en dépassant ces limites dans un sens ou dans l'autre de toutes les manières possibles, pourvu que, partant de $x_0 = \varphi(k)$, il arrive par des valeurs réelles à $x_1 = \psi(k)$, l'intégrale devra être complétée par l'addition de multiples entiers des aires des anneaux fermés de la section réelle, ou des produits par $\sqrt{-1}$ des aires des anneaux fermés de la section imaginaire à abscisses réelles.

L'intégrale

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z\,dx$$

représentera donc la somme des volumes compris entre la surface réelle et sa conjuguée à abscisses et ordonnées réelles, le plan des xy, les deux plans $y = y_0$, $y = y_1$ et les deux cylindres $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$.

Et si, dans chaque plan $y = k$, le point $[x, z]$ a décrit des anneaux fermés homologues et chacun un même nombre de fois dans chaque plan, l'intégrale comprendra, en outre, des multiples des volumes engendrés par ces différents anneaux fermés, lorsqu'ils se déplacent parallèlement au plan des xz entre les plans $y = y_0$, $y = y_1$.

Si $x_0 = \varphi(k)$ et $x_1 = \psi(k)$ étant toujours supposés réels, quel que soit k, on veut néanmoins faire passer x par des valeurs imaginaires, on pourra interrompre à un instant quelconque le chemin du point $[x, z]$ sur l'arc de la courbe réelle, par un tour fait sur une de ses conjuguées fermées, de façon à continuer ensuite l'arc réel, ou si cet arc réel se compose de deux branches distinctes et séparées, passer de l'une à l'autre en suivant l'une quelconque des conjuguées, au lieu de prendre, comme précédemment, la conjuguée à abscisses réelles.

L'intégrale aura, dans tous les cas, exactement la même valeur que dans le cas précédent, car les aires imaginaires des conjuguées fermées contenues dans un même plan seront égales, et par conséquent engendreront les mêmes volumes.

On pourra aussi faire parcourir au point $[x, z]$, dans chaque plan $y = k$, des anneaux fermés de l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la section, s'il y en a, et engendrer ainsi de nouvelles périodes.

Enfin, on pourra passer dans le plan de chaque section, du point $x_0 = \varphi(k)$ au point $x_1 = \psi(k)$, par une succession de valeurs imaginaires de x, réglée par une loi entièrement arbitraire, par une relation choisie à volonté entre les parties réelles et imaginaires de x et de z, cette relation n'étant assujettie qu'à la condition d'être satisfaite par

$$x_0 = \varphi(k), \qquad z_0 = \mathrm{F}(x_0, k)$$

et par

$$x = \psi(k), \qquad z_1 = \mathrm{F}(x_1, k),$$

quel que soit k.

Alors l'intégrale

$$\int_{\varphi(k)}^{\psi(k)} z\,dx$$

représentera l'aire de la section faite dans la surface réelle et sa conjuguée à abscisses et ordonnées réelles, par exemple, plus des multiples déterminés des périodes de la quadratrice de la section. Le chiffre de chacun de ces multiples se déterminera, comme on l'a vu dans la théorie des intégrales simples, par le nombre de tours que fera sur l'anneau correspondant de l'enveloppe totale, le point de contact de cet anneau avec la conjuguée sur laquelle se trouvera à chaque instant le point $[x, z]$, ou par le nombre de contacts du chemin qu'aura décrit ce point $[x, z]$, avec les branches de l'enveloppe qui touchent chaque anneau fermé de l'une des conjuguées imaginaires.

Il pourrait se faire que, k variant, le nombre de ces tours ou contacts ne dût pas rester le même dans les plans de toutes les sections, on devrait alors déterminer les valeurs de k entre lesquelles ces nombres resteraient constants; l'intégrale se composerait de multiples différents des volumes engendrés par les anneaux fermés, dans les intervalles des plans correspondant aux valeurs principales de k.

Si $x_0 = \varphi(k)$ et $x_1 = \psi(k)$ n'étaient pas constamment réels, les limites de l'intégrale

$$\int_{x_0,\ z_0}^{x_1,\ z_1} z\,dx$$

seraient prises, en général, sur deux conjuguées différentes de la section réelle contenue dans le plan $y = k$, et cette intégrale, à la différence près de la quantité $\frac{z_0^2}{2C_0} - \frac{z_1^2}{2C_1}$, représenterait la somme des aires des deux conjuguées passant par les limites, et de la courbe réelle terminée aux points où elle toucherait ces deux conjuguées; l'intégrale double, à la différence près de la quantité

$$\frac{1}{2}\int_{y_0}^{y_1} dy \left(\frac{z^2}{C}\right)_{x=\varphi(y)}^{x=\psi(y)},$$

représenterait donc le volume compris entre le plan des xy, la surface formée par les sections parallèles au plan des xz soit de la surface réelle, soit de ses conjuguées à ordonnées réelles qui passeraient par tous les points $y = k$, $x = \varphi(k)$ ou $\psi(k)$, $z = F(x, y)$, et un conoïde ayant pour génératrices les parallèles menées de ces divers points aux cordes réelles des conjuguées qui y passeraient.

Si les deux conjuguées, passant par les deux points limites, ne touchaient que l'enveloppe imaginaire, il faudrait substituer dans l'énoncé précédent cette enveloppe à la courbe réelle, et l'intégrale prise le long de son contour à l'aire de la courbe réelle.

402. Lorsque les deux courbes qui forment les limites de l'intégrale double, sont sur une même conjuguée, ou sur des conjuguées différentes, mais dont les caractéristiques soient proportionnelles, ou, enfin, quand ces deux courbes se composent de points pris sur les conjuguées dont les deux caractéristiques sont comme des nombres donnés, on peut éviter de faire sortir le point $[x, y, z]$ de ces conjuguées.

Ce cas peut se ramener au précédent par une transformation de coordonnées.

En faisant tourner le plan des xz d'un angle convenable, autour de l'axe des z, on substituera à la suite des valeurs que devaient prendre x, y et z, une autre suite de valeurs d'autres variables x', y', z', desquelles y' restera constamment réelle, et les valeurs de la nouvelle intégrale double

$$\sin \mathrm{YX}' \int dy' \int z' dx'$$

fourniront celles de la proposée. Or le paragraphe précédent les définit complétement.

403. Lorsque chacune des limites est tout entière sur une même conjuguée, les deux conjuguées qui les contiennent étant d'ailleurs différentes, on peut supposer que le point $[x, y, z]$ trace des courbes définies sur les conjuguées comprises dans une même suite : on ne pourra plus alors rendre en même temps réelles toutes les valeurs de y, par une même transformation de coordonnées; mais cependant on arrivera encore aisément à déterminer l'un des volumes que peut représenter, dans ce cas, l'intégrale double.

En effet, les limites étant fournies par deux courbes B et B′, tracées sur deux conjuguées différentes et quelconques d'ailleurs, l'intégrale comprendra évidemment, parmi ses valeurs, le volume de la conjuguée à laquelle appartient la courbe B, limité à cette courbe et à la courbe C suivant laquelle elle touche la surface réelle, plus le volume correspondant à la portion de la surface réelle comprise entre la courbe C et la courbe C′, suivant laquelle elle touche la conjuguée à laquelle appartient la courbe B′, plus le volume de cette dernière conjuguée limitée aux courbes C′ et B′, ces trois volumes étant compris dans trois cylindres parallèles à trois axes de z différents, mais dont les directions sont connues, plus enfin les parties complémentaires qui s'introduisent à chaque changement de direction de l'axe des z, parties que nous avons déjà plusieurs fois évaluées.

404. Supposons enfin qu'en tous les points d'une même limite, les deux caractéristiques conservent entre elles un rapport constant, ce rapport n'étant pas toutefois le même aux deux limites : A et B étant ces deux courbes limites, nous supposerons d'abord l'une d'elles A tracée sur la surface réelle.

Si nous commençons par faire tourner les axes des x et des y d'un angle tel, que les ordonnées de tous les points de la courbe B deviennent réelles, et que nous concevions ensuite dans chaque plan parallèle au nouveau plan des xz, et passant par un point de la courbe B, les sections faites dans la surface réelle et dans la conjuguée imaginaire à laquelle ce point appartient, ces deux sections tangentes entre elles se faisant suite l'une à l'autre, couperont aux points $x' = a$, $x' = b$, les courbes A et B,

$$dy' \int_a^b z' dx'$$

représentera la somme de leurs aires, à la différence près de la quantité algébrique

$$\left[\frac{(z')^2}{2C'}\right]_{x'=a}^{x'=b};$$

l'intégrale

$$\int dy' \int_{\varphi(y')}^{\psi(y')} z' dx',$$

dans laquelle $\varphi(y')$ et $\psi(y')$ seraient les valeurs générales de x' en y', pour tous les points de la courbe A et de la courbe B, représentera donc le volume de la surface réelle limitée à la courbe A et à la courbe D, suivant laquelle elle touche toutes les sections faites dans les conjuguées auxquelles appartiennent les points de la courbe B, plus le volume d'une surface imaginaire engendrée par ces sections, limitées à la surface réelle et à la courbe B, plus l'intégrale simple

$$\int dy' \left[\frac{(z')^2}{2C'}\right]_{x'=\varphi(y')}^{x'=\psi(y')}.$$

Si les deux limites A et B étaient imaginaires, on évaluerait séparément l'intégrale entre les courbes A, B et des courbes différentes D, E tracées sur la surface réelle, et on y joindrait l'intégrale prise entre les courbes D et E.

405. Le dernier cas qui resterait à examiner serait celui où les deux limites seraient composées de points entièrement quelconques. Mais la question, dans cette hypothèse générale, exige absolument un changement complet de variables indépendantes,

Nous passons donc à l'indication de la méthode, que nous avons annoncée, pour définir une intégrale double dans le cas le plus général d'une marche définie mais quelconque des deux variables indépendantes.

Définition et évaluation d'une intégrale double prise entre limites imaginaires.

406. Si z est défini par une équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

et que l'on fasse

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1},$$

l'équation

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \quad \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}) = 0$$

donnera deux relations entre les six variables α, β, α', β', α'' et β'', et quatre d'entre elles resteront indépendantes.

Pour délimiter l'intégrale $\Sigma z dx dy$ il faudra introduire deux nouvelles relations entre les six variables.

Supposons qu'on ait défini, au moyen de deux équations

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

la suite double des valeurs que doivent prendre x et y et, par conséquent, la série des éléments $z dx dy$ que l'on veut sommer, la somme de ces éléments sera

$$\mathrm{I} = \Sigma(\alpha'' + \beta''\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})(d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1})$$

ou

$$\begin{aligned}\mathrm{I} = {} & \Sigma(\alpha'' d\alpha d\alpha' - \alpha'' d\beta d\beta') \\ & - \Sigma(\beta'' d\alpha d\beta' + \beta'' d\beta d\alpha') \\ & + \sqrt{-1}\,\Sigma(\alpha'' d\alpha d\beta' + \alpha'' d\beta d\alpha') \\ & + \sqrt{-1}\,\Sigma(\beta'' d\alpha d\alpha' - \beta'' d\beta d\beta').\end{aligned}$$

Concevons les deux surfaces dont les coordonnées seraient

$$x = \alpha + \beta, \quad y = \alpha' + \beta', \quad z = \alpha'' + \beta''$$

et

$$x = \alpha - \beta, \quad y = \alpha' - \beta', \quad z = \alpha' - \beta'' :$$

le volume V, compris entre la première surface et le plan des xy, sera

$$\begin{aligned}\mathrm{V} = {} & \Sigma(\alpha'' d\alpha d\alpha' + \alpha'' d\beta d\beta') \\ & + \Sigma(\beta'' d\alpha d\beta' + \beta'' d\beta d\alpha')\end{aligned}$$

$$+\Sigma(\alpha''d\alpha d\beta'+\alpha''d\beta d\alpha')$$
$$+\Sigma(\beta''d\alpha d\alpha'+\beta''d\beta d\beta'),$$

et le volume V', compris entre la seconde surface et le plan des xy, sera

$$V'=\Sigma(\alpha''d\alpha d\alpha'+\alpha''d\beta d\beta')$$
$$+\Sigma(\beta''d\alpha d\beta'+\beta''d\beta d\alpha')$$
$$-\Sigma(\alpha''d\alpha d\beta'+\alpha''d\beta d\alpha')$$
$$-\Sigma(\beta''d\alpha d\alpha'+\beta''d\beta d\beta');$$

on déduit de ces deux dernières équations

$$\Sigma(\alpha''\,d\alpha\,d\alpha'+\alpha''\,d\beta\,d\beta')+\Sigma(\beta''\,d\alpha\,d\beta'+\beta''\,d\beta\,d\alpha')=\frac{V+V'}{2}$$

et

$$\Sigma(\alpha''\,d\alpha\,d\beta'+\alpha''\,d\beta\,d\alpha')+\Sigma(\beta''\,d\alpha\,d\alpha'+\beta''\,d\beta\,d\beta')=\frac{V-V'}{2}.$$

Il en résulte

$$I=-\frac{V+V'}{2}+2\Sigma\alpha''\,d\alpha\,d\alpha'+\sqrt{-1}\left(\frac{V-V'}{2}-2\Sigma\beta''\,d\beta\,d\beta'\right).$$

Considérons encore les deux surfaces dont les cordonnées seraient

$$x=\alpha,\quad y=\alpha',\quad z=\alpha''$$

et

$$x=\beta,\quad y=\beta',\quad z=\beta'',$$

et qui seraient, la première, le lieu des milieux des droites joignant les points correspondants des deux surfaces précédentes, et la seconde, le lieu des milieux des droites joignant les points correspondants de la première des deux surfaces précédentes et de la symétrique de la seconde par rapport à l'origine.

Les volumes V_1 et V'_1, compris entre ces deux surfaces et le plan des xy, seront respectivement

$$V_1=\Sigma\alpha''d\alpha d\alpha'\quad\text{et}\quad V'_1=\Sigma\beta''d\beta d\beta'.$$

On aura donc

$$I=-\frac{V+V'}{2}+2V_1+\sqrt{-1}\left(\frac{V-V'}{2}-2V'_1\right).$$

La suite des solutions considérées de l'équation $f(x,\ y,\ z)=0$ étant définie, on peut admettre que l'on puisse se procurer les coordonnées d'autant de points que l'on voudra des quatre surfaces que l'on a fait intervenir, ce qui permettra d'évaluer avec tel degré d'approximation

que l'on voudra, par excès et par défaut les quatre volumes V, V', V_1 et V'_1, en comprenant chacun d'eux entre des sommes de prismes triangulaires inscrits et circonscrits.

Mais, au reste, on pourra toujours obtenir les équations mêmes des quatre surfaces. En effet, pour obtenir celles des deux premières, il suffira d'éliminer α, β, α', β', α'' et β'' entre les deux relations

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

les deux équations dans lesquelles se décompose

$$f\left(\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha' + \beta'\sqrt{-1},\ \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}\right) = 0,$$

et les trois équations

$$x = \alpha + \beta, \quad y = \alpha' + \beta', \quad z = \alpha'' + \beta'',$$

pour la première, et

$$x = \alpha - \beta, \quad y = \alpha' - \beta', \quad z = \alpha'' - \beta'',$$

pour la seconde.

Quant aux deux dernières, ce sera encore plus facile : pour avoir l'équation de la troisième surface, il n'y aura qu'à éliminer β, β' et β'' entre

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0 \quad \text{et} \quad f = 0,$$

et à remplacer, dans l'équation résultante, α, α' et α'' par x, y et z. De même, pour avoir l'équation de la quatrième surface, il n'y aura qu'à éliminer α, α' et α'' entre les quatre mêmes équations

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0 \quad \text{et} \quad f = 0,$$

et à remplacer, dans l'équation résultante, β, β' et β'' par x, y et z.

Ainsi toute intégrale double définie se ramène aux cubatures de quatre surfaces réelles déterminées.

Nous désignerons par la suite les équations de ces quatre surfaces par

$$\varphi' = 0, \quad \varphi'_1 = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{et} \quad \psi_1 = 0.$$

Il ne reste qu'à indiquer comment on pourra fixer les limites de l'intégrale : ce sera évidemment, soit en se donnant une condition

$$\lambda(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$$

qui devrait être remplie par les valeurs extrêmes de α, β, α' et β', soit l'équation

$$\lambda'(x, y) = 0$$

de la projection sur le plan des x, y du contour de la portion de la surface $\varphi' = 0$ à laquelle devrait correspondre le volume V. On en conclura, en effet, les équations des projections sur le même plan des xy des contours correspondants des portions des autres surfaces $\varphi'_1 = 0$, $\psi = 0$ et $\psi_1 = 0$, auxquelles répondront les volumes V', V_1 et V'_1 ; car il est facile de voir que les quatre surfaces se correspondent point par point. En effet, si l'on se donne, par exemple, $\alpha + \beta$ et $\alpha' + \beta'$, l'équation $\varphi' = 0$ fournira $\alpha'' + \beta''$ et les trois équations $f = 0$ et $\varphi'_1 = 0$ achèveront de déterminer α, β, α', β', α'' et β''.

On peut encore remarquer que, dans les explications théoriques, on pourra, si on le veut, supposer que ce soient les équations $\varphi' = 0$ et $\varphi'_1 = 0$ qu'on se soit données pour définir l'intégrale, au lieu de $\varphi = 0$ et $\varphi_1 = 0$; car elles en tiennent parfaitement lieu.

Supposons que l'équation $f(x, y, z) = 0$ ait tous ses coefficients réels, et qu'on ait considéré une suite double de solutions de cette équation, représentées par

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1},$$

et pour laquelle on ait trouvé une valeur I de l'intégrale

$$\int z dx dy,$$

l'équation proposée étant par hypothèse capable des solutions imaginaires conjuguées des précédentes, on pourra considérer la suite de ces nouvelles solutions, et il y correspondra une nouvelle valeur I' de l'intégrale. Cette intégrale sera

$$\begin{aligned} \mathrm{I}' = &\Sigma\,(\alpha'' - \beta''\sqrt{-1})\,(d\alpha - d\beta\sqrt{-1})\,(d\alpha' - d\beta'\sqrt{-1}) \\ = &\Sigma\,(\alpha'' d\alpha d\alpha' - \alpha'' d\beta d\beta') \\ &+ \Sigma\,(\beta'' d\alpha d\beta' + \beta'' d\beta d\alpha') \\ &- \sqrt{-1}\,\Sigma\,(\alpha'' d\alpha d\beta' + \alpha'' d\beta d\alpha') \\ &- \sqrt{-1}\,\Sigma\,(\beta'' d\alpha d\alpha' - \beta'' d\beta d\beta'), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{I}' = -\frac{\mathrm{V} + \mathrm{V}'}{2} + 2\mathrm{V}_1 + \sqrt{-1}\left(\frac{\mathrm{V}' - \mathrm{V}}{2} + 2\mathrm{V}'_1\right);$$

ce que l'on aurait pu écrire de suite, les deux surfaces $\varphi' = 0$ et $\varphi'_1 = 0$ devant s'échanger entre elles, la surface $\psi = 0$ restant évidemment ce qu'elle était et la surface $\psi_1 = 0$ devant se changer en sa symétrique par rapport à l'origine.

Théorème de l'indépendance de la valeur de l'intégrale double et des valeurs intermédiaires des variables, les limites restant les mêmes.

407. Cela posé, nous commencerons par établir, comme pour la théorie des intégrales simples, que si les équations $\varphi = 0$ et $\varphi_1 = 0$ et, par suite, les équations $\varphi' = 0$, $\varphi'_1 = 0$, $\psi = 0$ et $\psi' = 0$ changent infiniment peu, sans toutefois que les équations

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha' + \beta'\sqrt{-1},\ \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}) = 0,$$
$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,\quad \varphi_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,\quad \lambda(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

cessent de comporter identiquement les mêmes solutions, l'intégrale I restera généralement invariable, et nous déterminerons les conditions dans lesquelles cette intégrale pourrait changer.

Si

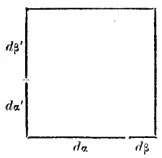
$$z = F(x, y)$$

est l'équation d'une surface réelle que l'on veuille cuber, et qu'on ait eu lieu de considérer les coordonnées x et y comme composées chacune de deux parties, α et β, pour x, α' et β', pour y, l'élément

$$z\,dx\,dy = z\,(d\alpha + d\beta)\,(d\alpha' + d\beta')$$

du volume cherché, correspondant à l'élément de surface $dx\,dy$, ou

$$(d\alpha + d\beta)\,(d\alpha' + d\beta'),$$



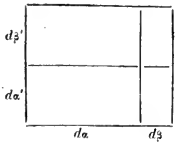
pourra être évalué de cinq manières différentes. Il sera exprimé d'abord par

$$F(\alpha + \beta, \alpha' + \beta')\,(d\alpha + d\beta)\,(d\alpha' + d\beta')$$

ou

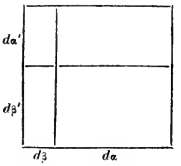
$$F(x, y)\,(d\alpha + d\beta)\,(d\alpha' + d\beta').$$

Il pourra l'être aussi par



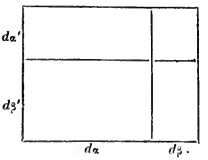
$$F(x, y)\, d\alpha d\alpha' + F(x + d\alpha, y)\, d\alpha' d\beta + F(x, y + d\alpha')\, d\alpha d\beta + F(x + d\alpha, y + d\alpha')\, d\beta d\beta',$$

ou par



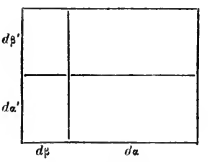
$$F(x, y)\, d\beta d\beta' + F(x + d\beta, y)\, d\alpha d\beta' + F(x, y + d\beta')\, d\alpha' d\beta + F(x + d\beta, y + d\beta')\, d\alpha d\alpha',$$

ou encore par



$$F(x, y)\, d\alpha d\beta' + F(x + d\alpha, y)\, d\beta d\beta' + F(x, y + d\beta')\, d\alpha d\alpha + F(x + d\alpha, y + d\beta')\, d\beta d\alpha',$$

ou enfin par



$$F(x, y)\, d\beta d\alpha' + F(x + d\beta, y)\, d\alpha d\alpha' + F(x, y + d\alpha')\, d\beta d\beta + F(x + d\beta, y + d\alpha')\, d\alpha d\beta'.$$

Il en est exactement de même si, x et y étant imaginaires, on a dû naturellement considérer à part leurs parties réelles et imaginaires, α et $\beta\sqrt{-1}$, pour x, α' et $\beta'\sqrt{-1}$, pour y. Cela tient simplement à ce que les facteurs finis

$$\begin{gathered}
\mathrm{F}(x+d\alpha,\ y),\quad \mathrm{F}\left(x+d\beta\sqrt{-1},\ y\right),\quad \mathrm{F}(x,\ y+d\alpha'),\\
\mathrm{F}\left(x,\ y+d\beta'\sqrt{-1}\right),\quad \mathrm{F}(x+d\alpha,\ y+d\alpha'),\\
\mathrm{F}\left(x+d\alpha,\ y+d\beta'\sqrt{-1}\right),\quad \mathrm{F}\left(x+d\beta\sqrt{-1},\ y+d\alpha'\right),
\end{gathered}$$

enfin

$$\mathrm{F}\left(x+d\beta\sqrt{-1},\ y+d\beta'\sqrt{-1}\right),$$

ne diffèrent de $\mathrm{F}(x, y)$ que d'infiniment petits, dont les produits par les deux facteurs différentiels, qui entrent dans le même terme, sont négligeables, comme étant du troisième ordre.

Mais il ne résulte absolument rien de l'identité des cinq formes de l'élément $z(d\alpha+d\beta)(d\alpha'+d\beta')$, parce que les parties α et β, α' et β' se confondent, à cause de l'identité de leur nature, tandis que l'égalité des cinq valeurs de l'élément

$$z\left(d\alpha+d\beta\sqrt{-1}\right)\left(d\alpha'+d\beta'\sqrt{-1}\right)$$

montre que l'on peut intervertir l'ordre des variations des parties réelles et imaginaires de x et de y, c'est-à-dire changer infiniment peu et ensuite d'une manière finie la suite double des valeurs attribuées à x et à y sans que l'intégrale I change.

En effet, en reportant d'abord chaque $d\alpha$ et chaque $d\alpha'$, par exemple, sur le dx et le dy précédents, puis encore chaque nouveau $d\alpha$ et chaque nouveau $d\alpha'$ sur le nouveau dx et le nouveau dy précédents, etc., on changera les lois de progression de x et de y, et, pourvu que les limites restent les mêmes, l'intégrale I ne variera pas.

Toutefois, la démonstration suppose que dans le cours de la déformation du système des valeurs prises par x et y, il ne puisse pas arriver que $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ deviennent infinis ou multiples, sans quoi, ou bien, les différences entre

$$\mathrm{F}(x,\ y)$$

et

$$\begin{gathered}
\mathrm{F}(x+d\alpha,\ y),\quad \mathrm{F}\left(x+d\beta\sqrt{-1},\ y\right),\quad \mathrm{F}(x,\ y+d\alpha'),\\
\mathrm{F}\left(x,\ y+d\beta'\sqrt{-1}\right),\quad \mathrm{F}(x+d\alpha,\ y+d\alpha'),\\
\mathrm{F}\left(x+d\alpha,\ y+d\beta'\sqrt{-1}\right),\quad \mathrm{F}\left(x+d\beta\sqrt{-1},\ y+d\alpha'\right),
\end{gathered}$$

enfin

$$\mathrm{F}\left(x+d\beta\sqrt{-1},\ y+d\beta'\sqrt{-1}\right),$$

cesseraient d'être infiniment petites; ou bien z, partant de valeurs égales, pourrait ensuite prendre des accroissements finis différents, lorsque x et y continueraient à varier.

Les dérivées partielles de z, par rapport à x et à y, étant données par les formules

$$-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}} \quad \text{et} \quad -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}},$$

les systèmes de valeurs de x, y et z, pour lesquels $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ prennent des valeurs infinies, sont donnés par l'équation

$$\frac{df}{dz} = 0,$$

qu'il faut joindre à l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

qui définit z.

Ces deux équations

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad f'_z(x, y, z) = 0$$

fourniront une infinité de systèmes de valeurs des trois variables, et, pour que l'intégrale I, définie par l'introduction des équations

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0,$$

ne varie pas lorsque φ et φ_1 se déformeront, sans que les équations

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \lambda = 0$$

cessent de comporter les mêmes solutions, il faudra que le système des solutions communes aux équations

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0,$$

dans l'intérieur de la limite $\lambda = 0$, ne renferme à aucun instant des solutions des équations

$$f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{df}{dz} = 0,$$

ou, du moins, ce n'est qu'autant que cette condition sera remplie qu'on pourra affirmer sans examen que l'intégrale sera restée la même.

408. Supposons que les valeurs extrêmes, assignées aux variables par les équations

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0,$$

se trouvent naturellement finies, en raison de la forme de ces équations, et constituent un ensemble continu, unique et fermé de toutes parts, conditions qui se trouveront réalisées si l'élimination de trois quelconques des quantités α, β, α', β', α'', β'', entre les quatre équations

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0,$$

conduit, pour les trois autres, à une équation telle que celle d'un sphéroïde : si l'intégrale doit comprendre tous les éléments $zdxdy$ correspondant à cet ensemble de solutions, l'équation aux limites, $\lambda = 0$, deviendra inutile.

D'ailleurs chacune des surfaces représentées par les équations

$$\varphi' = 0, \quad \varphi'_1 = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{et} \quad \psi_1 = 0,$$

se trouvera elle-même fermée, et ce seront les volumes compris dans les intérieurs de ces surfaces qui concourront à constituer l'intégrale, d'après la formule

$$\mathrm{I} = -\frac{\mathrm{V} + \mathrm{V}'}{2} + 2\mathrm{V}_1 + \sqrt{-1}\left(\frac{\mathrm{V} - \mathrm{V}'}{2} - 2\mathrm{V}'_1\right).$$

D'après la théorie précédente, si, après avoir tracé à volonté une courbe fermée sur la surface $\varphi' = 0$ et avoir déterminé en conséquence les courbes correspondantes sur les surfaces $\varphi'_1 = 0$, $\psi = 0$, $\psi_1 = 0$, on déformait un peu, et d'ailleurs arbitrairement, les figures des deux surfaces $\varphi' = 0$ et $\varphi'_1 = 0$, enfermées dans les deux courbes tracées, l'intégrale I ne changerait pas, tant que le système variable des valeurs de

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1},$$

qui correspondrait à chaque instant au groupe des deux portions déformées des surfaces $\varphi' = 0$ et $\varphi'_1 = 0$, n'admettrait aucune solution du système des deux équations

$$f = 0, \quad \frac{df}{dz} = 0.$$

Si les deux surfaces $\varphi' = 0$ et $\varphi'_1 = 0$ pouvaient être, dans ces conditions, aplaties et réduites chacune à deux feuilles planes ou courbes appliquées l'une sur l'autre, les deux autres surfaces $\psi = 0$ et $\psi_1 = 0$ se réduisant aussi nécessairement à des feuilles doublées, les quatre volumes V, V', V_1 et V'_1, s'annuleraient, l'intégrale se réduirait donc à zéro,

et comme elle n'aurait pas changé, elle aurait dû être nulle d'avance.

Dans ce cas, en général, toutes les sommes partielles

$$\Sigma\alpha''d\alpha d\alpha', \quad \Sigma\alpha''d_1'\beta d_1'\beta', \quad \Sigma\alpha''d\alpha d_1'\beta', \quad \Sigma\alpha''d_1'\beta d\alpha',$$
$$\Sigma_1'\beta''d\alpha d_1'\beta', \quad \Sigma_1'\beta''d_1'\beta d\alpha', \quad \Sigma_1'\beta''d\alpha d\alpha', \quad \Sigma_1'\beta''d_1'\beta d_1'\beta',$$

seraient séparément nulles. En effet, les variables α, α', α'', β, β' et β'' étant liées entre elles par quatre équations

$$f = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_1 = 0,$$

l'une quelconque des six est en réalité une fonction de deux des autres prises à volonté, de sorte que les sommes

$$\Sigma\alpha''d\alpha d\alpha', \quad \Sigma\alpha''d_1'\beta d_1'\beta', \quad \Sigma\alpha''d\alpha d_1'\beta', \quad \Sigma\alpha''d_1'\beta d\alpha',$$
$$\Sigma_1'\beta''d\alpha d_1'\beta', \quad \Sigma_1'\beta''d_1'\beta d\alpha', \quad \Sigma_1'\beta''d\alpha d\alpha', \quad \Sigma_1'\beta''d_1'\beta d_1'\beta',$$

représentent des segments des corps terminés par les surfaces dont les coordonnées seraient les variables qui sont dénommées dans chacune. Or si les dérivées partielles de la coordonnée α'' ou β'', qui entre en facteur sous le signe Σ, par rapport à celles dont le même signe contient les différentielles, ne deviennent pas infinies, cette coordonnée α'' ou β'' ne pourra prendre qu'une seule valeur pour chaque système de valeurs des deux autres; par conséquent, quand ces deux autres repasseront en sens inverses par les mêmes valeurs qu'elles avaient prises d'abord, les éléments nouvellement engendrés détruiront les anciens.

Pour que l'intégrale ne soit pas nulle, il faudra que, parmi les solutions des équations

$$f = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_1 = 0,$$

il s'en trouve satisfaisant aux conditions

$$\frac{d\alpha''}{d\alpha} = \infty, \quad \frac{d\alpha''}{d\alpha'} = \infty, \quad \frac{d_1'\beta''}{d\alpha} = \infty, \quad \frac{d_1'\beta''}{d\alpha'} = \infty,$$
$$\frac{d\alpha''}{d_1'\beta} = \infty, \quad \frac{d\alpha''}{d_1'\beta'} = \infty, \quad \frac{d_1'\beta''}{d_1'\beta} = \infty, \quad \frac{d_1'\beta''}{d_1'\beta'} = \infty,$$

ou au moins à quelques-unes d'entre elles.

Des périodes des intégrales doubles.

409. Nous supposerons d'abord que l'équation $f(x, y, z) = 0$ ait ses coefficients réels et admette une infinité de solutions réelles.

Nous commencerons encore ici par signaler tout d'abord les trois genres de parcours fermés auxquels correspondent les périodes.

Il est clair que si x, y et z ne prennent que des valeurs réelles, l'intégrale $\Sigma z dx dy$ sera purement réelle; mais pour que x, y et z reviennent simultanément à leurs valeurs initiales, sans avoir pris que des valeurs réelles et sans que z ait repassé par les mêmes valeurs, pour les mêmes systèmes de valeurs de x et de y, il faut que la surface représentée par l'équation $f(x, y, z) = 0$ présente des nappes fermées en forme de sphéroïdes ; d'un autre côté, il est clair que l'intégrale $\Sigma z dx dy$, prise le long d'une pareille nappe, aura pour valeur le volume que cette nappe entourera.

Ainsi les volumes enveloppés par les nappes fermées d'une surface $f(x, y, z) = 0$ sont des périodes réelles de l'intégrale

$$\int\int z dx dy,$$

définie par cette équation.

C'est ainsi que

$$\frac{4}{3}\pi abc$$

est la période réelle de l'intégrale

$$c\int\int dx dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

correspondant à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Du reste un ensemble fermé de systèmes de valeurs imaginaires de x, y et z, suffisamment peu distantes des valeurs des coordonnées des points d'une nappe fermée de la surface $f(x, y, z) = 0$, donnerait pour l'intégrale $\int\int z dx dy$ précisément la même valeur, c'est-à-dire encore le volume enveloppé par la nappe, de sorte que les périodes réelles, quoiqu'elles se présentent en général chacune sous une seule forme géométrique, peuvent en réalité être engendrées d'une infinité de manières différentes.

Les périodes réelles des intégrales doubles, précisément parce qu'elles n'ont généralement qu'une représentation géométrique, peuvent accidentellement correspondre à des nappes ne se rejoignant qu'à l'infini, comme il arrive, par exemple, pour l'intégrale

$$\int\int \frac{c dx dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}},$$

dont la période est le volume compris entre les deux nappes de la surface

$$\frac{z^2}{c^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=1,$$

comprises dans l'intérieur du cylindre

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

mais l'un des cas se ramène à l'autre.

410. Le second groupe de périodes, celles-là imaginaires sans parties réelles, correspond au parcours des nappes fermées de conjuguées.

La valeur de l'intégrale double $\Sigma z dx dy$, correspondant au système de valeurs de x et de y qui, conjointement avec les valeurs correspondantes de z, assignées par l'équation de la surface, fournissent les coordonnées des différents points d'une nappe fermée de conjuguée, est le produit par $\sqrt{-1}$ du volume enfermé par cette nappe fermée; et ce produit est évidemment une des périodes de l'intégrale double.

Les périodes de ce genre sont en nombre limité, comme celles du précédent, parce que, comme il est aisé de le constater directement, les nappes fermées de conjuguées, comprises entre les mêmes nappes de la surface réelle, enferment toutes des volumes équivalents.

Le troisième groupe de périodes comprend celles qui sont engendrées dans le parcours des nappes fermées de l'enveloppe imaginaire des conjuguées.

Théorème de l'équivalence en volume de toutes les conjuguées fermées comprises entre les mêmes nappes de la surface réelle.

411. Il suffira, pour établir ce théorème, de comparer entre elles les conjuguées qui ont en même temps leurs ordonnées y réelles, ou de comparer l'une d'elles à celle qui a ses ordonnées et ses abscisses réelles; car en changeant la direction de l'axe des x, on pourrait amener successivement toutes les autres à avoir leurs ordonnées y réelles, et, d'un autre côté, celle qui primitivement avait à la fois ses abscisses et ses ordonnées réelles se retrouverait toujours comprise dans chaque nouveau groupe.

Cela posé, l'aire de la section faite dans l'une des conjuguées, qui ont leurs ordonnées réelles, par un plan parallèle au plan des xz, est la la période imaginaire ω de l'intégrale $\int z dx$, calculée en supposant y constant; le segment compris entre deux plans parallèles au plan des

xz est donc $\int \omega dy$, qui a la même valeur, quelle que soit la conjuguée dont il s'agisse.

Il reste donc seulement à établir que toutes ces conjuguées ont les mêmes limites, parallèlement au plan des xz.

Or cela est évident : elles touchent en effet toutes la surface réelle aux points où elle a son plan tangent parallèle aux xz.

De la manière dont s'accroît l'intégrale double.

412. Quelle que soit la loi qui régisse le mouvement du point $[x, y, z]$, on pourra toujours regarder la portion de surface qu'il décrit et à laquelle correspond le volume qui forme la valeur de l'intégrale double (à la différence près de l'intégrale simple qu'introduit le changement de direction dans l'axe des z), comme engendrée par une courbe B tracée sur la surface réelle, sur une de ses conjuguées, permanente ou non, ou sur des conjuguées pour lesquelles le rapport des caractéristiques C et C′ resterait le même, ce rapport pouvant d'ailleurs changer ou non avec la position de la courbe B.

Dans le dernier cas, qui est le plus général, si la courbe B se déplace infiniment peu, l'intégrale subit trois variations distinctes.

1° Si par chaque point de la courbe B, on fait, dans la conjuguée à laquelle appartient ce point, une section parallèlle à la direction qu'il faudrait donner au plan des xz pour rendre réelles les ordonnées de la courbe B, ces sections forment une nappe N tangente à la surface réelle suivant une courbe A : or, lorsque la courbe B se déplace, la courbe A se déplace aussi sur la surface réelle, et l'intégrale s'accroît d'abord du volume correspondant à la portion de la surface réelle parcourue par la courbe A.

2° La nappe N prend à chaque instant des limites différentes, et si l'on mène par chaque point de la courbe B et par le point correspondant de la courbe A deux parallèles aux cordes réelles de la conjuguée qui passe au point considéré de B, la nappe N, le plan des xy et les deux conoïdes formés par les deux suites de droites qui viennent d'être définies, enveloppent un certain volume : ce volume varie quand la courbe B se déplace, et la variation qu'il subit est la seconde partie de l'accroissement de l'intégrale.

3° Enfin si l'on a formé l'expression du volume compris entre le plan des xy, le cylindre parallèle aux z ayant pour directrice la courbe B et le conoïde défini comme il vient de l'être, ayant la même directrice B, ce volume ayant été représenté par la même intégrale simple qui le fournirait réel : la variation de cette intégrale simple est la troisième partie de l'accroissement de l'intégrale double.

De la manière dont s'engendrent les périodes.

413. Lorsque la courbe B se déplace, la courbe A, si elle se trouve sur une nappe fermée de la surface réelle, peut parcourir cette nappe plusieurs fois dans le même sens, et chaque fois qu'un tour entier se trouve achevé, l'intégrale comprend une fois de plus le volume réel enfermé par cette nappe. C'est ainsi que s'engendrent les périodes réelles.

Si la courbe B reste sur une nappe illimitée, la partie imaginaire de l'intégrale croît ou décroît suivant que cette courbe B s'éloigne ou se rapproche de la surface réelle ; elle peut diminuer jusqu'à zéro ou croître sans limite, mais le volume formé ne peut être engendré deux fois, si l'on écarte le cas où, la courbe B étant fermée, on supposerait qu'elle fût parcourue plusieurs fois dans le même sens par le point mobile.

D'un autre côté, lorsque la courbe B reprend la même position, l'intégrale simple complémentaire reprend la même valeur, sans ambiguïté, et son accroissement total se réduit à zéro.

Rien, dans l'hypothèse, ne permet donc alors aux périodes imaginaires de se développer.

Mais si la courbe B parcourt une conjuguée fermée, ou si, en avançant, elle passe d'une conjuguée fermée à une autre voisine, ou si ses différents points restent sur des conjuguées fermées d'une même catégorie ; cette courbe peut deux, ou trois, ou quatre fois parcourir dans le même sens une conjuguée fermée, ou en parcourir les portions équivalentes sur les conjuguées fermées sur lesquelles elle arrive successivement, ou sur lesquelles se transportent ses différents points ; et, dans ce cas, la valeur de l'intégrale peut comprendre un nombre quelconque de fois le volume intérieur commun des conjuguées considérées.

414. Enfin les périodes relatives aux nappes fermées de l'enveloppe imaginaire des conjuguées s'engendrent comme celles qui se rapportent aux nappes fermées de l'enveloppe réelle, avec cette différence, toutefois, que chaque conjuguée ne touchant généralement l'enveloppe imaginaire qu'en quelques points, une nappe fermée de cette enveloppe ne pourrait être engendrée que par le mouvement de la courbe lieu des points de contact avec cette nappe, d'une infinité de conjuguées ; de sorte que, pour que cette nappe pût être engendrée, il faudrait que la courbe mobile B se composât de points appartenant à toute une série de conjuguées. Mais, dans cette hypothèse, la surface mobile parcourue par le point $[x, y, z]$ pourrait être formée du lieu des courbes tracées à partir des points de la courbe B, sur les conjuguées passant par ces points, de manière à aller rejoindre les points de contact de ces conjuguées avec la nappe considérée de l'enveloppe imaginaire.

Détermination du nombre de chacune des périodes que doit comprendre l'intégrale.

415. Il est évident que l'on ne saurait prétendre à donner une formule de ce nombre ; il s'agit seulement d'indiquer un caractère auquel on puisse reconnaître que la période est achevée.

Il suffira d'un mot pour ce qui concerne les périodes réelles : chaque fois qu'une nappe fermée de la surface réelle aura été engendrée de nouveau par la courbe lieu des points de contact avec cette nappe des courbes tracées à partir des points de la courbe mobile B, sur les conjuguées qui les contiennent, il faudra compter une période de plus.

La même notion suffit évidemment pour rendre compte de la répétition des périodes relatives aux nappes fermées de l'enveloppe imaginaire.

Quant aux périodes relatives aux nappes fermées des conjuguées, elles peuvent se clore de plusieurs manières différentes : la partie imaginaire de l'intégrale, qui s'accroît à mesure que la courbe B s'éloigne de la surface réelle, atteint la valeur du demi-volume intérieur de l'une des conjuguées fermées, au moment où cette courbe, se réduisant à un point, a parcouru dans son entier l'un des hémisphères de la conjuguée, séparés par la surface diamétrale qu'elle a en commun avec la surface réelle. A partir de là, la courbe B, en reprenant des dimensions finies, retrancherait une partie du volume imaginaire déjà engendré, la demi-période achevée se perdrait petit à petit, et la partie imaginaire de l'intégrale pourrait redevenir nulle au moment où la courbe B repasserait sur la surface réelle. Toutefois il n'en serait déjà plus ainsi si le point où se réduit la courbe B appartenait à la limite commune des deux hémisphères, c'est-à-dire à la surface réelle, parce que la courbe B, en reprenant des dimensions finies, pourrait se transporter de l'un sur l'autre hémisphère, de façon que les deux hémisphères étant parcourus successivement, toujours dans le même ordre, chaque demi-période achevée s'ajoutât aux précédentes.

Mais, en général, l'accumulation des périodes se produira par le mouvement de la courbe B, tournant comme autour d'un axe, toujours dans le même sens, de façon à décrire plusieurs fois une même conjuguée ou des parties équivalentes de conjuguées voisines.

Chaque fois que la courbe B viendrait de nouveau se confondre avec la courbe de contact d'une conjuguée avec la surface réelle, ou, si tous les points de la courbe B n'appartenaient pas à une même conjuguée, chaque fois qu'elle viendrait se placer sur la surface réelle, ou enfin si tous les points de la courbe B ne passaient pas simultanément sur la surface réelle, dès qu'ils y auraient du moins tous passé, il faudrait compter une période de plus.

Du cas où l'équation proposée aurait ses coefficients imaginaires.

416. Le cas où l'équation $f(x, y, z) = 0$ aurait ses coefficients imaginaires se ramène à l'autre comme dans la théorie des intégrales simples.

Lorsque les coefficients de l'équation que l'on traite, précédemment réels, viennent à prendre des accroissements imaginaires d'abord infiniment petits, la surface réelle se transforme instantanément en enveloppe imaginaire, mais sans changer qu'infiniment peu de forme, de sorte que ses nappes fermées se retrouvent dans la nouvelle enveloppe. Les valeurs de l'intégrale qui correspondent à leur parcours restent des périodes de l'intégrale.

Quant aux conjuguées, elles conservent leur figure primitive, sauf qu'il s'y joint de nouvelles nappes provenant d'une sorte de clivage de l'ancienne surface réelle, par des motifs analogues à ceux qui ont été donnés aux numéros 151 et 152. Mais ces conjuguées conservent leurs nappes fermées et les valeurs de l'intégrale qui correspondent aux parcours de ces nappes formées restent des périodes de l'intégrale.

Enfin l'ancienne enveloppe imaginaire persiste et les valeurs de l'intégrale qui correspondent aux parcours de ses nappes fermées restent des périodes de l'intégrale.

EXEMPLES.

417. Nous prendrons d'abord pour exemple l'intégrale

$$\int dy \int dx \sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^2}x^2 + \frac{b^2+c^2}{b^2}y^2 - 1}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}},$$

qui donne l'aire de l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

La même intégrale, multipliée par a, représenterait le volume indéfini compris entre le plan des xy et la surface

$$\frac{z}{a}=\sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^2}x^2 + \frac{b^2+c^2}{b^2}y^2 - 1}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}}.$$

Le contour apparent de cette surface est formé des deux ellipses

$$\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2+\frac{b^2+c^2}{b^4}y^2-1=0$$

et

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0:$$

la première est entourée par la seconde, par conséquent la surface réelle se projette dans l'intérieur de la première et au dehors de la seconde ; elle se compose donc d'une nappe fermée de toutes parts, comprise entre les plans $z=\pm a$ et le cylindre

$$\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2+\frac{b^2+c^2}{b^4}y^2-1=0,$$

et d'une nappe indéfinie, asymptotique au cylindre

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

qui tombe ensuite comme en forme de rideau pour s'épanouir parallèlement au plan des xy, en s'appuyant à l'infini sur le conoïde

$$y=mx,$$
$$z=a\sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^4}+\frac{b^2+c^2}{b^4}m^2}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}m^2}},$$

qui en forme la seconde asymptote.

La conjuguée à abscisses et à ordonnées réelles touche, sur le plan des xy, le cylindre

$$\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2+\frac{b^2+c^2}{b^4}y^2-1=0,$$

et est asymptotique au cylindre

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Les autres conjuguées sont des anneaux toroïdes compris entre les deux nappes de la surface réelle.

L'intégrale

$$a\int dy\int dx\sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2+\frac{b^2+c^2}{b^4}y^2-1}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}}$$

aura pour période réelle le volume compris dans l'intérieur de la nappe fermée de la surface réelle, et pour période imaginaire le volume compris dans l'intérieur d'une conjuguée quelconque, ou entre la conjuguée dont les z seuls sont imaginaires et le cylindre asymptotique

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

418. Cet exemple donne lieu à des remarques analogues à celles que nous avons présentées à propos de la rectification de l'hyperbole. Nous rappellerons d'abord ce qui a été dit au numéro 230 : quand le point $[x, y, z]$ se déplace sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées, parallèlement au plan des xz ou des yz, les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ sont réelles, et le cosinus de l'angle formé avec le plan des xy par le plan tangent à cette enveloppe, au point $[x,y, z]$, est encore exprimé par la formule

$$\frac{f'z}{\sqrt{(f'x)^2+(f'y)^2+(f'z)^2}};$$

toutefois $dx.dy$ ne représente généralement plus alors la projection sur le plan des xy d'un élément superficiel de l'enveloppe, de sorte que l'intégrale

$$\Sigma dx\,.\,dy\,\frac{\sqrt{(f'x)^2+(f'y)^2+(f'z)^2}}{f'z},$$

prise entre des limites appartenant à l'enveloppe imaginaire, ne fournit généralement pas l'aire de cette enveloppe.

Mais si les coordonnées x, y, z des différents points de l'enveloppe sont imaginaires sans parties réelles, ou, ce qui revient au même, sont composées de parties réelles constantes et de parties imaginaires seules variables, x, y, z ayant alors ou pouvant recevoir la forme

$$x=\beta\sqrt{-1},$$
$$y=\beta'\sqrt{-1},$$
$$z=\beta''\sqrt{-1},$$

$dx\,.\,dy$ se réduira à $-d\beta\,.\,d\beta'$ et représentera, au signe près, la projection sur le plan des xy d'un élément superficiel de l'enveloppe, de sorte que l'intégrale

$$\Sigma\,dx\,.\,dy\,\frac{\sqrt{(f'x)^2+(f'y)^2+(f'z)^2}}{f'z}$$

conviendra aussi à l'expression de l'aire indéfinie de cette enveloppe.

Cela posé, l'enveloppe imaginaire de l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

est l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

dont les points sont fournis par les solutions de la forme

$$x=\beta\sqrt{-1},\quad y=\beta'\sqrt{-1},\quad z=\beta''\sqrt{-1},$$

de l'équation proposée ; par conséquent l'intégrale double

$$\Sigma\, dx\,.\,dy\sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^2}x^2+\frac{b^2+c^2}{b^2}y^2-1}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}},$$

pourvu qu'on en détermine convenablement les limites, fournira également bien les aires de l'une et de l'autre des deux enveloppes, seulement la seconde aire sera affectée du signe contraire à celui qu'elle devrait avoir d'après le sens dans lequel elle aurait été engendrée.

419. Cette remarque donne aisément l'interprétation de la période réelle de l'intégrale quadratrice de l'hyperboloïde à une nappe.

Mais nous rechercherons d'abord directement cette période, en supposant, toutefois, pour rendre la démonstration accessible au calcul, que l'hyperboloïde soit de révolution autour de son axe non transverse.

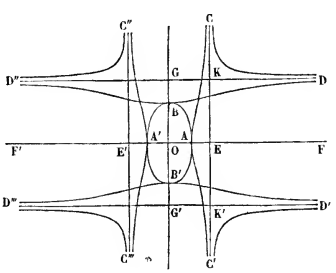


Fig. 24 bis.

Si l'on a pris cet axe non transverse pour axe des z, l'équation de la section méridienne contenue dans le plan des xz sera $a^2z^2-b^2x^2=-a^2b^2$, et la courbe dont l'aire divisée par a donnerait la longueur de cette

section méridienne sera la courbe ABA'B'CDC'D'C''D''C'''D''' de la figure 24 du n° 364, qui nous a déjà servi à trouver l'interprétation des périodes de l'intégrale rectificatrice de l'hyperbole $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$.

L'aire DCEF, arrêtée à une distance $x = R$, représente le produit par a de l'arc de l'hyperbole génératrice, compris entre le sommet de cette hyperbole et le point dont l'abscisse serait R, par conséquent le volume engendré par la révolution de cette aire autour de BB' représentera le produit par a de l'aire de l'hyperboloïde, comprise entre les deux parallèles

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

De même l'aire DGB, arrêtée à la distance $x = R$, représente le produit par a de l'arc de l'hyperbole supplémentaire de la proposée, compris entre son sommet et le point $x = R$, par conséquent le volume engendré par la révolution de cette aire autour du même axe BB' représentera le produit par a de l'aire de l'hyperboloïde à deux nappes, supplémentaire du proposé, comprise entre les deux parallèles

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Enfin l'aire DGOF, arrêtée à la même distance $x = R$, représente le produit par a de la longueur de l'asymptote, comprise entre l'origine et le point $x = R$, par conséquent le volume engendré par la révolution de cette aire représentera le produit par a de l'aire du cône asymptote, comprise entre les parallèles

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Soient ds un élément de l'hyperbole proposée, ds' un élément de l'hyperbole supplémentaire et $d\sigma$ un élément de l'asymptote commune, l'aire engendrée par la rotation de l'hyperbole proposée sera

$$2\pi\Sigma x ds\,;$$

celles qui seront engendrées par l'hyperbole supplémentaire et par l'asymptote seront de même

$$2\pi\Sigma x ds' \quad \text{et} \quad 2\pi\Sigma x d\sigma\,;$$

par conséquent les trois volumes considérés précédemment seront

$$2\pi a\Sigma x ds, \quad 2\pi a\Sigma x ds' \quad \text{et} \quad 2\pi a\Sigma x d\sigma\,;$$

la différence des deux derniers est

$$2\pi a\,(\Sigma x d\sigma - \Sigma x ds'),$$

ou

$$2\pi a\Sigma x\,(d\sigma - ds'),$$

en attribuant la même abscisse aux éléments correspondants. Cette différence peut encore s'écrire

$$2\pi\Sigma x\,(ad\sigma - ads').$$

Mais $ad\sigma - ads'$ est la différence des éléments ayant pour base commune dx, des aires DGOF et DBOF, ou l'élément de l'aire DBG, ayant pour base dx, de sorte que

$$2\pi\Sigma x\,(ad\sigma - ads'),$$

ou le produit par a de la différence des aires de l'hyperboloïde à deux nappes et du cône asymptote, comprises entre les parallèles $x^2 + y^2 = 0$ et $x^2 + y^2 = h^2$, est égal au volume engendré par l'aire DBG.

La courbe DBD″, en tournant autour de l'axe BB′ n'engendre pas une conjuguée de la surface quadratrice

$$z = a\sqrt{\frac{\frac{a^2+b^2}{a^4}x^2 + \frac{a^2+b^2}{a^4}y^2 - 1}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1}},$$

car l'abscisse d'un de ses points étant imaginaire de la forme $\beta\sqrt{-1}$, la courbe que décrit ce point est l'enveloppe imaginaire des conjuguées du cercle

$$x^2 + y^2 = -\beta^2,$$

c'est-à-dire le cercle $x^2 + y^2 = \beta^2$, représenté en coordonnées imaginaires sans parties réelles.

Aussi le volume enveloppé par cette surface n'est-il pas imaginaire, car il est exprimé par

$$\int_a^{\sqrt{a^2+b^2}} -\beta^2 dz.$$

Mais ce volume réel, quoique la surface qui l'enferme ne soit pas une nappe de la surface réelle, n'en est pas moins le produit par a de la période réelle de l'intégrale quadratrice de l'hyperboloïde de révolution.

Cette période réelle est donc la différence des aires indéfinies de l'hyperboloïde à deux nappes, supplémentaire du proposé, et du cône asymptote, terminées à deux parallèles de même rayon indéfiniment croissant.

Ce résultat s'explique naturellement de la manière suivante.

420. Chaque génératrice du cône asymptote d'un hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

est une conjuguée limite de la section de l'hyperboloïde par un plan passant par cette génératrice, le cône asymptote lui-même fait donc partie de la surface. Ce cône est en effet représenté d'une infinité de manières par les solutions infinies de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

car si l'on pose dans cette équation

$$x=\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad y=\alpha'+\beta'\sqrt{-1},\quad z=\alpha''+\beta''\sqrt{-1},$$

on aura, pour déterminer α, β, α', β', α'' et β'', les deux équations

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{a^2}+\frac{\alpha'^2-\beta'^2}{b^2}-\frac{\alpha''^2-\beta''^2}{c^2}=1$$

et

$$\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}-\frac{\alpha''\beta''}{c^2}=0$$

qui, en supposant x, y et z infinis, se réduiront à

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{a^2}+\frac{\alpha'^2-\beta'^2}{b^2}-\frac{\alpha''^2-\beta''^2}{c^2}=0$$

et

$$\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}-\frac{\alpha''\beta''}{c^2}=0,$$

et exprimeront que le point $[x, y, z]$ appartient au cône asymptote ou à l'une de ses conjuguées et l'on obtiendra tous les points du cône asymptote lui-même en joignant à ces deux équations la condition

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{a^2}+\frac{(\alpha'+\beta')^2}{b^2}-\frac{(\alpha''+\beta'')^2}{c^2}=0,$$

qui, combinée avec les précédentes, donne

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\alpha'^2}{b^2}-\frac{\alpha''^2}{c^2}=0,$$
$$\frac{\beta^2}{a^2}+\frac{\beta'^2}{b^2}-\frac{\beta''^2}{c^2}=0,$$
$$\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}-\frac{\alpha''\beta''}{c^2}=0,$$

d'où l'on voit que l'on pourra particulièrement engendrer le cône asymptote en laissant α, α' et α'' ou β, β' et β'' infinis et constants, et faisant varier seulement β, β' et β'' ou α, α' et α''.

Dans le premier cas dx, dy et dz seront imaginaires sans parties réelles et, dans le second, entièrement réels, mais dans l'un et l'autre cas $\frac{dz}{dx} = p$ et $\frac{dz}{dy} = q$ seront réels, par conséquent

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

représentera le cosinus de l'angle avec le plan des xy de l'élément de la surface engendrée.

D'un autre côté $dx \,.\, dy$ représentera la projection sur le plan des xy de cet élément de la surface, cet élément sera donc représenté par

$$dx dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1},$$

au signe près, si dx et dy sont imaginaires sans parties réelles.

Cela posé, on obtiendra une surface fermée, représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et le long de laquelle, par conséquent, l'aire engendrée sera une période de l'intégrale quadratrice, en déplaçant parallèlement à elle-même, le long de l'arc BT, l'ellipse

$$z = \beta'' \sqrt{-1}, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\beta''^2}{c^2},$$

de façon qu'elle engendre la nappe supérieure TBT''' de l'hyperboloïde supplémentaire du proposé; en faisant passer cette ellipse, arrivée à l'infini, sur le cône asymptote et lui faisant parcourir successivement ses deux nappes, α, α' et α'' variant alors de 0 à $-\infty$, au moment d'atteindre le plan des xy, et de $+\infty$ à 0 du plan des xy à l'infini en dessous, ramenant alors l'ellipse mobile sur la nappe inférieure de l'hyperboloïde T''B'T' et lui faisant parcourir cette nappe jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse en B'.

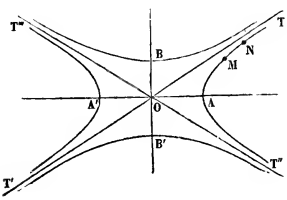


Fig. 25 bis.

Or, l'aire engendrée dans ce parcours sera réelle et égale à la différence des aires indéfinies de l'hyperboloïde à deux nappes et du cône asymptote, arrêtés à deux sections égales.

Cette différence est donc la période réelle de l'intégrale quadratrice

de l'hyperboloïde à deux nappes, comme on l'avait trouvé précédemment.

421. *Remarque.* — Dans le nouvel ordre d'idées où nous venons de nous placer, la même période réelle se présenterait plus simplement d'une autre manière et sous une autre forme. En effet, pour engendrer l'aire de l'hyperboloïde à une nappe, comprise entre les deux plans parallèles au plan des xy menés par les points M et N, on pourrait supposer que l'on fît glisser parallèlement à elle-même, le long de MNT, jusqu'à l'infini, l'ellipse génératrice de la surface, qu'on fît alors passer cette ellipse sur le cône asymptote et qu'on lui fît parcourir dans toute leur étendue les deux nappes de ce cône en faisant varier seulement β, β' et β'' de 0 à $-\infty$ d'abord, et ensuite de $+\infty$ à 0, qu'on la ramenât alors sur l'hyperboloïde à une nappe et qu'on la fît glisser sur cet hyperboloïde tout le long de l'arc T″MN, enfin qu'on l'arrêtât au point N.

On aurait ainsi décrit la surface du segment compris entre les points M et N, plus la différence des aires indéfinies de l'hyperboloïde à une nappe et de son cône asymptote, arrêtés à une même section.

Cette différence doit donc aussi être une période de l'intégrale quadratrice de l'hyperboloïde à une nappe.

On peut conclure de là, en s'appuyant sur ce que l'intégrale quadratrice n'a qu'une période réelle, que deux hyperboloïdes supplémentaires, prolongés jusqu'à une même section indéfinie, ont même aire.

Mais la même section du cône asymptote ne va pas se placer à la même hauteur sur les deux hyperboloïdes, et, quoique la différence de hauteur soit infiniment petite, comme le périmètre de la section est infini, la différence des surfaces est finie : elle est égale à la différence des aires des deux hyperboloïdes prolongés jusqu'à une même hauteur infinie.

En effet, si, pour plus de simplicité, on suppose les deux hyperboloïdes de révolution, la différence de niveau de deux sections de même rayon x sera

$$2\left\{\frac{b}{a}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{b}{a}x\right\}=\frac{2ab}{x+\sqrt{x^2+a^2}},$$

et la longueur de la portion de la génératrice du cône asymptote comprise entre les plans des deux sections sera

$$\frac{2a\sqrt{a^2+b^2}}{x+\sqrt{x^2+a^2}},$$

de sorte que si l'on suppose x assez grand pour que la courbure de la courbe méridienne ait disparu, l'aire comprise sur l'un ou l'autre des hyperboloïdes, entre les plans des deux sections, sera

$$2\pi x\,\frac{2a\sqrt{a^2+b^2}}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \quad \text{ou} \quad 2\pi a\sqrt{a^2+b^2}.$$

422. Considérons encore l'équation

$$x^2+y^2+z^2=\left(r+r'\sqrt{-1}\right)^2$$

qui donne

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z}=-\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\alpha''+\beta''\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z}=-\frac{\alpha'+\beta'\sqrt{-1}}{\alpha''+\beta''\sqrt{-1}}.$$

Pour que $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ soient réels, il faudra que

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''};$$

d'ailleurs on aura

$$\alpha^2-\beta^2+\alpha'^2-\beta'^2+\alpha''^2-\beta''^2=r^2-r'^2$$

et

$$\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=rr'.$$

Si l'on élimine β, β' et β'' entre ces quatre équations, ce que l'on fera en les remplaçant d'abord respectivement par $k\alpha$, $k\alpha'$, $k\alpha''$ et éliminant ensuite k, on aura d'abord

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=\frac{r^2-r'^2}{1-k^2} \quad \text{et} \quad \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=\frac{rr'}{k},$$

d'où

$$(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2)\left(1-\frac{r^2r'^2}{(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2)^2}\right)=r^2-r'^2$$

ou

$$(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2)^2-(r^2-r'^2)(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2)=r^2r'^2=0,$$

d'où

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=\frac{r^2-r'^2\pm(r^2+r'^2)}{2};$$

mais on ne pourra prendre que

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=r^2.$$

Il en résulte

$$\beta^2+\beta'^2+\beta''^2=r'^2,$$

et comme on a

$$2\alpha\beta+2\alpha'\beta'+2\alpha''\beta''=2rr',$$

en ajoutant les trois équations, on obtient

$$(\alpha+\beta)^2+(\alpha'+\beta')^2+(\alpha''+\beta'')^2=(r+r')^2,$$

ce qui est l'équation de la surface dont le volume est V ; de même, en ajoutant les deux premières et retranchant la troisième, on trouve

$$(\alpha-\beta)^2+(\alpha'-\beta')^2+(\alpha''-\beta'')^2=(r-r')^2,$$

ce qui est l'équation de la surface dont le volume est V', quant aux volumes V_1 et V'_1 ce sont ceux des surfaces

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=r^2 \quad \text{et} \quad \beta^2+\beta'^2+\beta''^2=r'^2.$$

Ainsi les quatre surfaces, dont les volumes V, V', V_1 et V'_1 composeront l'intégrale cherchée, sont

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=(r+r')^2,\\ x^2+y^2+z^2&=(r-r')^2,\\ x^2+y^2+z^2&=r^2,\\ x^2+y^2+z^2&=r'^2. \end{aligned}$$

Cette intégrale serait, pour des limites quelconques,

$$I=-\frac{V+V'}{2}+2V_1+\left(\frac{V-V'}{2}-2V'_1\right)\sqrt{-1};$$

mais, si l'on veut la période de cette intégrale, il faudra étendre I à tout le système de solutions pour lesquelles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ restent réels, c'est-à-dire prendre pour V, V', V_1 et V'_1 les volumes des quatre sphères entières : on aura ainsi

$$\frac{4}{3}\pi\left\{-\frac{(r+r')^3+(r-r')^3}{2}+2r'^3+\left[\frac{(r+r')^3-(r-r')^3}{2}-2r'^3\right]\sqrt{-1}\right\},$$

ou, en réduisant,

$$\frac{4}{3}\pi\left(r+r'\sqrt{-1}\right)^3,$$

qui est, en effet, la période de l'intégrale

$$\int\int dxdy\sqrt{\left(r+r'\sqrt{-1}\right)^2-x^2-y^2}.$$

CHAPITRE XXXVI

DES INTÉGRALES D'ORDRE QUELCONQUE

De l'intégrale relative au champ réel ou à l'un des champs imaginaires conjugués.

423. On peut généraliser les théorèmes que nous avons établis dans les chapitres précédents, et les étendre aux intégrales d'ordre quelconque.

Mais nous devons d'abord expliquer le sens de quelques mots nouveaux que nous serons obligés d'employer.

La géométrie ne fournissant pas de moyens de figurer les solutions qui peuvent convenir à une équation

$$f(x, y, z..., t, u, \mathrm{F}) = 0,$$

contenant plus de trois variables, nous désignerons, pour abréger, sous le nom de *champ* réel de l'équation, l'ensemble de ses solutions réelles, et, par champs imaginaires conjugués, les ensembles de ses solutions imaginaires groupées convenablement.

Toute équation aura un champ réel et une infinité de champs imaginaires conjugués, chacun de ces derniers comprenant toutes les solutions de l'équation proposée où les parties imaginaires de x, y, z..., t, u, F seraient comme des nombres constants $\frac{1}{C_1}$, $\frac{1}{C_2}$,... $\frac{1}{C_n}$, 1.

Les solutions appartenant à un même champ imaginaire conjugué seront donc de la forme

$$\begin{aligned}
x &= \alpha + \frac{\beta_n}{C_1}\sqrt{-1},\\
y &= \alpha_1 + \frac{\beta_n}{C_2}\sqrt{-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u &= \alpha_{n-1} + \frac{\beta_n}{C_n}\sqrt{-1},\\
\mathrm{F} &= \alpha_n + \beta_n\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Les $n+2$ variables $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ et β_n étant liées entre elles par les deux équations dans lesquelles se décompose l'équation $f=0$, l'indétermination dans chaque groupe de solutions imaginaires appartenant à un même champ conjugué, sera de l'ordre n, comme dans le groupe des solutions réelles.

424. Les solutions appartenant à un même champ imaginaire conjugué pourraient, d'une infinité de manières différentes, être rendues réelles par rapport à toutes les variables moins une, au moyen de transformations linéaires.

La plus simple de ces transformations consiste à substituer à $x, y, z, \ldots, t, u$ les variables définies par les équations

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_1}, \\ y' &= y - \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_2}, \\ z' &= z - \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_3}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u' &= u - \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_n}. \end{aligned}$$

Le champ imaginaire par rapport à F seulement de l'équation

$$f\left(x' + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_1},\ y' + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_2}, \ldots,\ u' + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_n},\ \mathrm{F}\right) = 0$$

remplacerait le champ imaginaire $\left[\frac{1}{\mathrm{C}_1}, \frac{1}{\mathrm{C}_2}, \ldots \frac{1}{\mathrm{C}_n}\right]$ de l'équation

$$f(x, y, z, \ldots, t, u, \mathrm{F}) = 0.$$

425. Le champ imaginaire, par rapport à F seulement, de l'équation

$$f(x, y, z, \ldots, t, u, \mathrm{F}) = 0,$$

touche le champ réel de la même équation par les solutions réelles communes aux équations

$$f = 0, \quad f_{\mathrm{F}}' = 0.$$

Le groupe des solutions communes au champ réel et à tout autre champ imaginaire conjugué sera, au moyen de la transformation précédente, tout aussi facile à obtenir.

Le champ imaginaire conjugué $\left[\frac{1}{\mathrm{C}_1}, \frac{1}{\mathrm{C}_2}, \ldots \frac{1}{\mathrm{C}_n}\right]$ touchera évidem-

ment le champ réel par les solutions correspondant aux solutions réelles communes aux deux équations

$$f\left(x'+\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_1},\ y'+\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_2},\dots\ u'+\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_n},\ \mathrm{F}\right)=0$$

et

$$\frac{1}{\mathrm{C}_1}f_{x'}\left(x'+\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_1},\dots\right)+\frac{1}{\mathrm{C}_2}f_{y'}\left(x'+\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_1},\dots\right)+\dots+f_{\mathrm{F}'}\left(x'+\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_1},\dots\right)=0.$$

Pour un champ imaginaire par rapport à u et F seulement, ces équations deviendraient

$$f\left(x,\ y,\dots\ t,\ u'+\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_n},\ \mathrm{F}\right)=0,$$

et

$$\frac{1}{\mathrm{C}_n}f_{u'}\left(x,\ y,\dots\ t,\ u'+\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_n},\ \mathrm{F}\right)+f_{\mathrm{F}'}\left(x,\ y,\dots\ t,\ u'+\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{C}_n},\ \mathrm{F}\right)=0.$$

426. Si l'on ne considère d'abord que les solutions réelles d'une équation

$$f\,(x,\ y,\ z,\dots\ s,\ t,\ u,\ \mathrm{F})=0,$$

l'intégrale

$$\sum\nolimits_n \mathrm{F}\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz\dots\dots\ dt\,.\,du$$

pourra immédiatement se mettre sous la forme

$$\int dx\int dy\int dz\dots\int dt\int \mathrm{F}du.$$

Si d'ailleurs, le champ réel en question étant supposé fini, continu et unique, on veut étendre l'intégrale à tout ce champ, comme les valeurs de u et de F qui correspondront à un système de valeurs choisies pour $x,\ y,\ z,\dots,\ t$, formeront elles-mêmes un lieu fermé, on prendra l'intégrale $\int \mathrm{F}du$ pour le contour entier de ce lieu, c'est-à-dire, par exemple, entre les limites déterminées par $f'_{\mathrm{F}}=0$; en substituant, bien entendu, à F la différence de ses deux valeurs.

L'intégrale obtenue, qui sera une fonction de $x,\ y,\ z,\dots,\ s,\ t$, étant désignée par F_1, on prendra ensuite l'intégrale $\int \mathrm{F}_1 dt$ entre les limites pour lesquelles F_1 serait nul.

La nouvelle intégrale obtenue, qui sera une fonction de $x,\ y,\ z,\dots s$, étant désignée par F_2, on prendra de même l'intégrale $\int \mathrm{F}_2 ds$ entre les limites pour lesquelles F_2 serait nul.

Et l'on continuera ainsi jusqu'au bout.

Il n'y a pas lieu de poser la question de savoir si l'intégrale serait

restée la même, l'ordre des intégrations venant à changer d'une manière quelconque; le résultat définitif sera toujours le même, parce qu'en fait ce sera toujours la même grandeur concrète qu'on aura calculée.

427. Supposons maintenant qu'au lieu d'un champ réel fini, continu et unique, associé à une infinité de champs imaginaires conjugués, sans limites, l'équation $f = 0$ comporte un champ réel illimité et une infinité de champs imaginaires conjugués, limités de toutes parts, et occupons-nous d'abord de celui dont le F seulement serait imaginaire; l'intégrale

$$\sum_n \mathrm{F} \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz \ldots \, ds \,.\, dt \,.\, du,$$

étendue à tout ce champ, pourra se ramener encore immédiatement à des intégrales superposées, et les limites des intégrations partielles devront être déterminées par le groupe correspondant à l'ordre adopté, des équations à zéro des intégrales successives.

Or la propriété, dont jouit l'intégrale étendue à tout champ réel, de conserver la même valeur, dans quelque ordre qu'on superpose les intégrations partielles, dépend essentiellement de la nature des équations qui déterminent les limites de ces intégrations.

Ces équations restant les mêmes pour le champ imaginaire dont nous parlons, que pour le champ réel, l'ordre des intégrations pourra donc encore être interverti à volonté

Si l'on voulait obtenir l'intégrale

$$\sum_n \mathrm{F} \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz \ldots \,.\, dt \,.\, du,$$

étendue à tout un champ conjugué quelconque $\left[\frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_2}, \ldots, \frac{1}{C_n}\right]$, on pourrait substituer à $x, y, z, \ldots, t, u$ les variables réelles $x', y', \ldots, t', u'$ définies par les relations

$$\begin{aligned}
x' &= x - \frac{\mathrm{F}}{C_1}, \\
y' &= y - \frac{\mathrm{F}}{C_2}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
t' &= t - \frac{\mathrm{F}}{C_{n-1}}, \\
u' &= u - \frac{\mathrm{F}}{C_n};
\end{aligned}$$

et l'on formerait, au moyen de la règle donnée par Jacobi, la fonction

de x', y', z',... t', u', qu'on devrait placer sous le signe $\int$ dans la nouvelle intégrale.

Cette nouvelle intégrale se ramènerait immédiatement à des intégrations séparées, qu'on pourrait superposer dans un ordre complétement arbitraire.

428. L'intégrale

$$\sum_n \mathrm{F}.dx.dy.dz..... dt.du,$$

étendue à tout un champ imaginaire conjugué, est toujours imaginaire, sans partie réelle, lorsque l'équation qui définit F est algébrique et entière, parce qu'à un système de valeurs

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \frac{\beta_n}{C_1}\sqrt{-1}, \\ y &= \alpha_1 + \frac{\beta_n}{C_2}\sqrt{-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u &= \alpha_{n-1} + \frac{\beta_n}{C_n}\sqrt{-1}, \\ \mathrm{F} &= \alpha_n + \beta_n\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

correspond, dans le même champ, son conjugué

$$\begin{aligned} x &= \alpha - \frac{\beta_n}{C_1}\sqrt{-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{F} &= \alpha_n - \beta_n\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

et qu'au système de différentielles

$$\begin{aligned} dx &= d\alpha + \frac{d\beta_n}{C_1}\sqrt{-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ du &= d\alpha_{n-1} + \frac{d\beta_n}{C_n}\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

correspond aussi, dans le même champ, son conjugué

$$\begin{aligned} dx &= d\alpha - \frac{d\beta_n}{C_1}\sqrt{-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ du &= d\alpha_{n-1} - \frac{d\beta_n}{C_n}\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Définition et évaluation de l'intégrale relative à un champ quelconque.

429. Soient toujours $x, y, z, \ldots, t, u$ les n variables indépendantes et F une fonction de ces n variables, définie par une équation

$$f(x, y, z, \ldots t, u, \mathrm{F}) = 0;$$

$x, y, z, \ldots$, étant supposés imaginaires, seront représentés respectivement, dans un état quelconque, par

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta\sqrt{-1}, \\ y &= \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}, \\ z &= \alpha_2 + \beta_2\sqrt{-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et F le sera par

$$\mathrm{F} = \alpha_n + \beta_n\sqrt{-1}.$$

Pour que l'intégrale

$$\int_n \mathrm{F}dxdydz\ldots$$

soit définie, il faudra introduire, entre α, β, α_1, β_1, α_2, $\beta_2, \ldots \alpha_{n-1}$ et β_{n-1}, n relations qui, jointes aux deux dans lesquelles se décompose

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}, \ldots \quad \alpha_n + \beta_n\sqrt{-1}) = 0,$$

réduiront le nombre des variables indépendantes à n et feront de F une fonction déterminée, par exemple, de α, α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$.

On parviendra à une méthode pratique d'évaluation de l'intégrale par les considérations suivantes.

L'intégrale a pour expression

$$\mathrm{I} = \sum (\alpha_n + \beta_n\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})(d\alpha_1 + d\beta_1\sqrt{-1})\ldots(d\alpha_{n-1} + d\beta_{n-1}\sqrt{-1});$$

or, si l'on conçoit que le produit

$$(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})(d\alpha_1 + d\beta_1\sqrt{-1})\ldots(d\alpha_{n-1} + d\beta_{n-1}\sqrt{-1})$$

soit effectué, il pourra être décomposé en quatre parties : la première contenant les produits partiels où n'entrerait qu'un seul facteur de la forme $d\beta\sqrt{-1}$, ou qui en comprendraient $4k + 1$; la deuxième con-

tenant les produits partiels où entreraient seulement deux facteurs de la forme $d\beta\sqrt{-1}$, ou qui en comprendraient $4k+2$; la troisième contenant les produits partiels où entreraient seulement trois facteurs de la forme $d\beta\sqrt{-1}$, ou qui en comprendraient $4k+3$; enfin la quatrième contenant le produit $d\alpha d\alpha_1 d\alpha_2, \ldots d\alpha_{n-1}$ et tous les produits partiels qui comprendraient $4k$ facteurs de la forme $d\beta\sqrt{-1}$.

La première partie pourra être désignée par

$$\sqrt{-1}\,P_1,$$

P_1 désignant la somme des produits contenant $4k+1$ facteurs de la forme $d\beta$.

La deuxième le sera de même par

$$-P_2,$$

la troisième le sera par

$$-\sqrt{-1}\,P_3,$$

et la quatrième par

$$P_0;$$

l'intégrale prendra alors la forme

$$I=\Sigma(\alpha_n+\beta_n\sqrt{-1})\left[P_0+\sqrt{-1}\,P_1-P_2-\sqrt{-1}\,P_3\right].$$

Cela posé, si l'on conçoit qu'entre les deux équations dans lesquelles se décompose

$$f\left(\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \alpha_1+\beta_1\sqrt{-1},\ldots\quad \alpha_n+\beta_n\sqrt{-1}\right)=0,$$

les n relations introduites, que nous désignerons par

$$\varphi=0,\quad \varphi_1=0,\ldots\quad \varphi_{n-1}=0,$$

et les $n+1$ équations

$$x_1=\alpha+\beta,\quad y_1=\alpha_1+\beta_1,\quad z_1=\alpha_2+\beta_2,$$
$$F_1=\alpha_n+\beta_n,$$

on élimine les $2n+2$ variables $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$, ce qui donnera une relation entre les quantités réelles

$$x_1,\ y_1,\ z_1\ldots,\quad \text{et}\quad F_1,$$

on pourra concevoir l'intégrale

$$U=\Sigma F_1 dx_1 dy_1 dz_1\ldots$$

Pareillement, si entre les deux équations dans lesquelles se décompose

$$f(\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \alpha_1+\beta_1\sqrt{-1},\ldots\quad \alpha_n+\beta_n\sqrt{-1})=0,$$

les n relations

$$\varphi=0,\quad \varphi_1=0,\ldots\quad \varphi_{n-1}=0,$$

et les $n+1$ équations

$$x'_1=\alpha-\beta,\quad y'_1=\alpha_1-\beta_1,\quad z'_1=\alpha_2-\beta_2,\ldots$$
$$F'_1=\alpha_n-\beta_n,$$

on éliminait les $2n+2$ variables α, β, α_1, β_1,..., α_n, β_n, ce qui donnerait une relation entre les quantités réelles

$$x'_1,\ y'_1,\ z'_1,\ldots\ F'_1,$$

on pourrait concevoir aussi l'intégrale

$$U'=\Sigma F'_1 dx'_1 dy'_1 dz'_1\ldots$$

Mais l'intégrale U aura pour expression

$$U=\sum(\alpha_n+\beta_n)\,(d\alpha+d\beta)\,(d\alpha_1+d\beta_1)\ldots\,(d\alpha_{n-1}+d\beta_{n-1})!$$

ou

$$U=\sum(\alpha_n+\beta_n)\,[P_0+P_1+P_2+P_3],$$

les lettres P_0, P_1, P_2, P_3 désignant les mêmes quantités que précédemment.

Et de même l'intégrale U' aura pour expression

$$U'=\sum(\alpha_n+\beta_n)\,[P_0-P_1+P_2-P_3].$$

D'un autre côté, si l'on effectue les produits indiqués dans les trois formules précédentes, on trouve

$$I=\begin{cases}\Sigma\alpha_n\,[P_0-P_2]\\ -\Sigma\beta_n\,[P_1-P_3]\\ +\sqrt{-1}\,\Sigma\alpha_n\,[P_1-P_3]\\ +\sqrt{-1}\,\Sigma\beta_n\,[P_0-P_2],\end{cases}$$

$$U=\begin{cases}\Sigma\alpha_n\,[P_0+P_2]\\ +\Sigma\beta_n\,[P_1+P_3]\\ +\Sigma\alpha_n\,[P_1+P_3]\\ +\Sigma\beta_n\,[P_0+P_2],\end{cases}$$

$$U' = \begin{cases} \Sigma\alpha_n [P_0 + P_2] \\ + \Sigma\beta_n [P_1 + P_3] \\ - \Sigma\alpha_n [P_1 + P_3] \\ - \Sigma\beta_n [P_0 + P_2]. \end{cases}$$

Mais les deux dernières égalités donnent

$$\frac{U + U'}{2} = \Sigma\alpha_n [P_0 + P_2] + \Sigma\beta_n [P_1 + P_3]$$

et

$$\frac{U - U'}{2} = \Sigma\alpha_n [P_1 + P_3] + \Sigma\beta_n [P_0 + P_2],$$

par conséquent la partie réelle de I est exprimée par

$$\Sigma\alpha_n [P_0 - P_2] - \Sigma\beta_n [P_1 - P_3] = -\frac{U + U'}{2} + 2\Sigma\alpha_n P_0 + 2\Sigma\beta_n P_3;$$

et la partie imaginaire par

$$\Sigma\alpha_n [P_1 - P_3] + \Sigma\beta_n [P_0 - P_2] = \frac{U - U'}{2} + \Sigma\alpha_n P_3 + 2\Sigma\beta_n P_2.$$

Ainsi

$$I = -\frac{U + U'}{2} + 2\Sigma\alpha_n P_0 + 2\Sigma\beta_n P_3 + \sqrt{-1}\left[\frac{U - U'}{2} + 2\Sigma\alpha_n P_3 + 2\Sigma\beta_n P_2\right].$$

Enfin si l'on désigne par U_1 et U'_1 les intégrales

$$U_1 = \Sigma\alpha_n P_0 + \Sigma\beta_n P_3$$

et

$$U'_1 = \Sigma\alpha_n P_3 + \Sigma\beta_n P_2,$$

on aura en définitive

$$I = -\frac{U + U'}{2} + 2U_1 + \sqrt{-1}\left[\frac{U - U'}{2} + 2U'_1\right].$$

Chacune des intégrales composant U_1 et U'_1 pourrait d'ailleurs s'exprimer par une intégrale d'ordre n d'une fonction réelle de n variables réelles, définie par une équation qu'on obtiendrait par des éliminations suffisamment indiquées par ce qui précède.

Si l'équation

$$f(x, y, z, \ldots F) = 0$$

a tous ses coefficients réels, elle admettra les solutions

$$x = \alpha - \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha_1 - \beta_1\sqrt{-1}, \ldots \quad F = \alpha_n - \beta_n\sqrt{-1},$$

conjuguées des précédentes, et l'on pourra considérer l'intégrale I' correspondant à cet ensemble de solutions. Cette nouvelle intégrale sera évidemment exprimée par

$$I' = -\frac{U' + U}{2} + 2U_1 + \sqrt{-1}\left[\frac{U' - U}{2} - 2U'_1\right].$$

Il reste à indiquer comment pourront être définies les limites de l'intégrale. Or, en supposant que α, $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ soient les variables que l'on aura voulu regarder comme indépendantes, il suffira pour fixer ces limites d'établir, entre les valeurs de α, $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$, $n-1$ relations nouvelles qui doivent être satisfaites aux limites seulement.

En effet, chacune des intégrales qui composent l'intégrale I portant maintenant sur une fonction des variables réelles α, $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$, cette intégrale pourrait dès lors être obtenue par des intégrations successives: la séparation des variables y est faite. Une quelconque de ces intégrales peut être considérée comme étant de la forme

$$\int d\alpha \int d\alpha_1 \ldots \int d\alpha_{n-1} F_1(\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1});$$

or, si l'on intègre d'abord par rapport à α_{n-1}, on fera de α_{n-1}, aux limites, une fonction des autres variables ; intégrant ensuite par rapport à α_{n-2}, on fera de α_{n-2}, aux limites, une fonction des variables restantes, et ainsi de suite, jusqu'à α, qui recevra, aux limites, deux valeurs numériques, formant les limites par rapport à α de la courbe dont les coordonnées seraient α et α_1.

Théorème de l'indépendance de la valeur d'une intégrale d'ordre quelconque et des valeurs intermédiaires des variables, les limites restant les mêmes.

430. On démontrera, exactement comme dans les chapitres précédents, que si les n relations $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0,\ldots,\varphi_{n-1} = 0$ se déforment insensiblement sans cesser d'admettre pour les variables indépendantes les mêmes systèmes de valeurs aux limites, l'intégrale ne variera généralement pas. On obtiendra d'ailleurs, de la même manière, les expressions des conditions dans lesquelles elle pourrait changer.

Il suffira pour cela de remarquer que chaque élément de l'intégrale,

$$F(\alpha+\beta\sqrt{-1}, \alpha_1+\beta_1\sqrt{-1},\ldots, \alpha_{n-1}+\beta_{n-1}\sqrt{-1})\,(d\alpha+d\beta\sqrt{-1})\ldots(d\alpha_{n-1}+d\beta_{n-1}\sqrt{-1}),$$

pourra être formé de la somme de tous les éléments analogues que l'on obtiendrait en ne faisant varier à la fois que l'une seulement des

parties de chacune des variables dx, dy, dz,..., pourvu qu'on tînt compte de toutes les combinaisons possibles, effectuées d'ailleurs dans l'ordre que l'on voudrait.

Il résultera de là que l'on pourra faire varier à volonté les lois de progression de x, y, z,..., pourvu toutefois qu'aucun système nouvellement introduit de valeurs de α, β, α_1, β_1,..., α_{n-1}, β_{n-1} ne satisfasse à aucune des équations

$$F = \infty, \quad \frac{dF}{dx} = \infty, \quad \frac{dF}{dy} = \infty, \ldots$$

c'est-à-dire ne satisfasse ni à l'équation

$$F = \infty,$$

ni à l'équation

$$\frac{df}{dF} = 0.$$

On rendrait compte, comme dans les cas précédents, de l'annulation de l'intégrale et de chacune de ses parties, dans tous les cas où les variables indépendantes ne varieraient que dans des limites trop restreintes. En effet, les $2n + 2$ variables

$$\alpha, \beta, \quad \alpha_1, \beta_1, \ldots, \quad \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \quad \alpha_n, \beta_n,$$

étant liées entre elles par $n + 2$ équations, chacune des quantités α_n et β_n pourra être considérée comme une fonction de n de celles qu'on voudra des $2n$ premières, et notamment des n dont les différentielles entreraient dans la partie de l'intégrale totale qu'on voudrait considérer, de sorte que cette partie de l'intégrale totale ne serait en définitive que l'intégrale d'une fonction réelle de n variables réelles. Or, si cette fonction ne pouvait pas prendre de valeurs multiples, ses valeurs ne pourraient pas se permuter entre elles, de sorte que le système de valeurs des variables et de la fonction étant supposé fermé et la fonction repassant, au retour, par les mêmes valeurs qu'elle avait prises pendant l'aller, la somme des éléments engendrés serait identiquement nulle.

Des périodes des intégrales d'ordre quelconque.

431. En supposant d'abord, comme dans les cas précédents, que l'équation

$$f(x, y, z, \ldots F) = 0$$

ait tous ses coefficients réels, on démontrera de la même manière que les périodes seront réelles ou imaginaires sans parties réelles.

Le premier groupe de périodes se composera des valeurs de l'intégrale correspondant aux systèmes de valeurs réelles des $n+1$ variables $x, y, z, \ldots, \mathrm{F}$, formant des ensembles fermés, s'il y en a, ou se rejoignant à l'infini.

Par exemple, l'intégrale

$$d\iiint dx\,dy\,dz\,\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$$

aura pour période réelle

$$d\int_{-a}^{+a}dx\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dy\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dz\,\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}},$$

de même l'intégrale

$$d\iiint\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}},$$

aura pour période réelle

$$d\int_{-a}^{+a}dx\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dy\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\frac{dz}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}}.$$

Mais on pourra substituer à un système fermé de valeurs réelles tout autre ensemble formé de solutions imaginaires de l'équation

$$f(x, y, z, \ldots \mathrm{F}) = 0,$$

qui seraient suffisamment voisines des précédentes.

432. Le second groupe de périodes se composera des valeurs de l'intégrale correspondant aux champs imaginaires conjugués, fermés de toutes parts, que pourra comporter l'équation

$$f(x, y, \ldots, \mathrm{F}) = 0.$$

433. Il est facile de voir, comme dans le cas des intégrales simples ou doubles, que l'intégrale relative à un pareil champ conjugué sera constante.

En effet l'intégrale, relative au champ imaginaire par rapport à F seulement, peut s'écrire

$$\int dx . \int dy . \int dz \ldots \int dt . \int \mathrm{F} . du ;$$

mais nous savons, d'après ce qui a été dit des intégrales simples, que la première des intégrales superposées dans cette formule, $\int \mathrm{F} . du$, calculée comme si x, y,..., t étaient des paramètres, aura toujours la même valeur, quelle que soit la conjuguée de la courbe [F, u] que l'on suive, au lieu de celle dont les u sont réels; on voit donc déjà qu'au champ imaginaire, par rapport à F seulement, on peut substituer un quelconque des champs imaginaires par rapport à F et à u, sans que l'intégrale complète en éprouve d'altération; et comme on aurait pu changer arbitrairement l'ordre des intégrations superposées, tant qu'il ne s'agissait que du champ imaginaire par rapport à F seulement, on voit également qu'on pourrait substituer à ce champ tout autre champ imaginaire par rapport à F et à une quelconque des autres variables.

Pour démontrer le théorème dans toute sa généralité, nous définirons, autrement que nous ne l'avons supposé jusqu'ici, les variables réelles qui doivent être substituées aux variables imaginaires.

Soient $\frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_2}, \ldots, \frac{1}{C_n}$ les caractéristiques du champ considéré, que nous voulons comparer au champ imaginaire par rapport à F seulement; si nous posons

$$x' = x - \frac{C_2}{C_1} y,$$

$$y' = y - \frac{C_3}{C_2} z,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t' = t - \frac{C_n}{C_{n-1}} u ;$$

x', y', z',..., t' seront réels, soit que les valeurs de x, y, z,..., t, u soient prises dans un champ ou dans l'autre; en d'autres termes, la transformation étant faite et l'intégrale étant ramenée à la forme

$$\int dx' \int dy' \int dz' \ldots \int dt' \int du . \mathrm{F}_1 (x', y', \ldots, t', u),$$

elle se rapportera au champ $\left[\frac{1}{0}, \frac{1}{0}, \frac{1}{0}, \ldots, \frac{1}{0}\right]$, si l'on ne donne à u que des valeurs réelles, et au champ $\left[\frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_2}, \ldots, \frac{1}{C_n}\right]$, si l'on donne à u des valeurs imaginaires convenablement choisies : or, elle aura la même

valeur dans les deux cas, si les limites de toutes les intégrations successives sont ce qu'elles doivent être quand il s'agit d'un champ fermé et d'une intégrale complète.

434. *Remarque.* Si l'on faisait complétement la transformation des variables pour un champ $\left[\frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_2}, \ldots, \frac{1}{C_n}\right]$, l'intégrale

$$\sum_n F(x, y, z, \ldots t, u)\, dx.dy \ldots dt.du,$$

correspondant à ce champ, en supposant qu'on eût employé, pour faire la transformation, les formules

$$x' = x - \frac{C_2}{C_1} y,$$

$$y' = y - \frac{C_3}{C_2} z,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t' = t - \frac{C_n}{C_{n-1}} u,$$

$$u' = u,$$

deviendrait, si $F_1(x', y', z', \ldots, t', u')$ désignait le résultat de la substitution dans $F(x, y, z, \ldots, t, u)$ des valeurs de $x, y, z, \ldots, t, u$ tirées des équations précédentes en fonction de $x', y', z', \ldots, t', u'$ et D le déterminant

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{dx'}{dx}, & \frac{dx'}{dy}, & \frac{dx'}{dz}, \cdots & \frac{dx'}{dt}, & \frac{dx'}{du}, \\
\frac{dy'}{dx}, & \frac{dy'}{dy}, & \frac{dy'}{dz}, \cdots & \frac{dy'}{dt}, & \frac{dy'}{du}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\frac{dt'}{dx}, & \frac{dt'}{dy}, & \frac{dt'}{dz}, \cdots & \frac{dt'}{dt}, & \frac{dt'}{du}, \\
\frac{du'}{dx}, & \frac{du'}{dy}, & \frac{du'}{dz}, \cdots & \frac{du'}{dt}, & \frac{du'}{du};
\end{array}$$

cette intégrale, disons-nous, deviendrait

$$\sum_n F_1(x', y', \ldots t', u') \frac{dx'.dy' \ldots dt'.du}{D}.$$

Or le déterminant D, dans ce cas, serait

$$\begin{matrix} 1 & -\frac{C_2}{C_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{C_3}{C_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{C_4}{C_3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{C_n}{C_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix}$$

c'est-à-dire 1.

L'intégrale se réduirait donc à

$$\sum_n F_1(x', y', \dots t', u')\, dx'.dy'.dz' \dots dt'.du'.$$

La transformation n'affecterait donc pas essentiellement la fonction placée sous le signe $\sum$, et c'est pourquoi nous avons pu dire que l'intégrale représenterait, relativement, la même grandeur, soit qu'elle fût prise pour le champ réel ou pour un champ conjugué quelconque.

Le théorème que nous avions en vue est donc complétement établi ; mais l'intégrale reprendrait encore la même valeur si, à l'un des champs conjugués on substituait tout autre champ fermé, défini comme on voudrait, pourvu qu'il touchât le champ réel par des solutions appartenant à un système où l'indétermination fût de l'ordre $n - 1$.

435. Les formules du n° 429 permettent d'exprimer plus simplement qu'on ne vient de le supposer la période relative à un champ imaginaire conjugué, fermé de toutes parts. En effet, en prenant pour limite l'ensemble des valeurs réelles de x, y, z,..., F par lequel se rejoindront nécessairement les deux systèmes de valeurs imaginaires conjuguées relatifs à ce champ, on aura pour valeur de l'intégrale totale

$$I = I' - I'' = \sqrt{-1}\,(U - U') + 4U'_1\sqrt{-1};$$

mais U'_1 désigne une somme d'intégrales renfermées dans les deux types

$$\Sigma\alpha_n P_3 \quad \text{et} \quad \Sigma\beta_n P_3,$$

et toutes ces intégrales seront séparément nulles en raison du choix intervenu dans le système de solutions imaginaires conjuguées considéré. En effet $\Sigma\alpha_n P_3$ est une somme d'intégrales de la forme

$$\int d\alpha_p \int d\beta_q \int \ldots \int\int\int \alpha_n d\beta d\beta_1 d\beta_2,$$

mais β, β_1 et β_2 étant proportionnels à des constantes $\frac{1}{C_1}$, $\frac{1}{C_2}$, $\frac{1}{C_3}$, la dernière intégrale

$$\int\int\int \alpha_n d\beta d\beta_1 d\beta_2$$

sera identiquement nulle.

De même $\Sigma\beta_n P_2$ désigne une somme d'intégrales de la forme

$$\int d\alpha_r \int d\beta_s, \ldots, \int\int \beta_n d\beta d\beta_1,$$

et comme β_n, β et β_1 seront proportionnels à 1, $\frac{1}{C_1}$, $\frac{1}{C_2}$ la dernière intégrale

$$\int\int \beta_n d\beta d\beta_1$$

sera identiquement nulle.

Il ne restera donc, pour l'intégrale totale, dans l'hypothèse considérée, que

$$I = (U - U')\sqrt{-1},$$

c'est-à-dire le produit de $\sqrt{-1}$ par l'intégrale correspondant au système de valeurs réelles de

$$\alpha_n \pm \beta_n,$$

considéré comme fonction de

$$\alpha \pm \beta, \quad \alpha_1 \pm \beta_1, \ldots \quad \alpha_{n-1} \pm \beta_{n-1}.$$

On voit encore mieux par là que dans ce qui précède, que cette intégrale, au facteur $\sqrt{-1}$ près, représentera par rapport à l'ensemble

$$x = \alpha \pm \beta, \quad y = \alpha_1 \pm \beta_1, \ldots \quad F = \alpha_n \pm \beta_n,$$

la même grandeur qu'on avait voulu exprimer par l'intégrale réelle relative à l'ensemble réel de valeurs de x, y, z, ..., F.

456. Enfin on obtiendra le troisième groupe de périodes en considérant les ensembles fermés de solutions imaginaires de l'équation proposée pour lesquels

$$\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}, \ldots$$

seraient restés réels.

Le cas où l'équation proposée aurait ses coefficients imaginaires différera seulement du précédent en ce que l'intégrale, naturellement, ne présentera plus de périodes du premier genre. Les analogues de celles-ci se retrouveront dans celles du troisième genre, mais elles seront en général composées d'une partie réelle et d'une partie imaginaire.

EXEMPLES

437. L'intégrale

$$\int\int\int dxdydz\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$$

aura pour période unique la somme que l'on trouverait en donnant à x, y et z les valeurs des coordonnées de tous les points compris dans l'intérieur de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

L'intégrale

$$\int\int\int \frac{dxdydz}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}\right)}}$$

en supposant, pour plus de simplicité, que l'un des ellipsoïdes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\quad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}-1=0,$$

par exemple le premier, soit entièrement enveloppé par l'autre, aura pour période réelle la somme qu'on obtiendrait en donnant à x, y et z les valeurs des coordonnées des points de l'intérieur du premier ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

et, pour période imaginaire, celle qu'on formerait en donnant à x, y et z les valeurs des coordonnées des points compris entre les deux ellipsoïdes.

Si la densité de l'espace était

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}\right)}}$$

tous les corps, compris dans des espaces clos, dont les points auraient pour coordonnées et pour densité les valeurs réelles

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta, \\ y &= \alpha' + \beta, \\ z &= \alpha' + \beta, \\ \mathrm{D} &= \delta + \delta' \end{aligned}$$

correspondant à des solutions imaginaires,

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta\sqrt{-1}, \\ y &= \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \\ z &= \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}, \\ \mathrm{D} &= \delta + \delta'\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

de l'équation

$$\mathrm{D}^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}\right)=1,$$

telles que $\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\beta'}{\delta'}$ et $\frac{\beta''}{\delta'}$ conservassent respectivement mêmes valeurs :

tous ces corps conjugués auraient même poids réel, affecté, dans le calcul, du signe $\sqrt{-1}$.

CHAPITRE XXXVII

CLASSIFICATION DES INTÉGRALES QUADRATRICES DES COURBES ALGÉBRIQUES

438. Il existe dans chaque degré des courbes quarrables algébriquement, d'autres dont les quadratures dépendent des inverses des fonctions circulaires ou exponentielles, d'autres qui se quarrent à l'aide des fonctions elliptiques; d'autres, enfin, dont les aires dépendraient de transcendantes irréductibles aux précédentes et que, pour cette raison, on a appelées ultra-elliptiques, mais qui, naturellement, doivent constituer une infinité de classes distinctes.

A quels caractères géométriques de la courbe à quarrer correspondent ces différents cas?

Quel est le nombre maximum de périodes que puisse présenter la quadratrice d'une courbe de degré m et quels sont les nombres de périodes cycliques, elliptiques, ultra-elliptiques que comportera la quadratrice dans le cas du nombre maximum de périodes?

Dans quels cas et comment ces périodes disparaissent-elles ou se transforment-elles les unes dans les autres?

Telles sont les questions que comporte la classification des intégrales quadratrices des courbes algébriques. Elles ne pourront jamais être toutes résolues, puisque le nombre des classes de périodes est nécessairement infini, mais les plus urgentes le seront.

Les questions dont il s'agit ont depuis longtemps occupé l'attention des géomètres : ainsi M. Jordan dit, dans sa thèse soutenue en 1861, que M. Puiseux lui a parlé d'une formule du nombre des périodes de la quadratrice d'une courbe de degré m, laissée par Cauchy, dans une note dont au reste il ne fait pas connaître le texte. M. Jordan ajoute que M. Puiseux lui a communiqué sur ce même sujet des recherches inédites datant de 1851, d'où résultait la solution complète de la question dans le cas où tous les points critiques étaient distincts les uns des autres. Mais il ne fait pas non plus connaître la formule à laquelle était arrivé M. Puiseux.

Celle qu'il adopte est $(m-1)^2$, pour une courbe de degré m.

Après avoir donné cette formule du nombre maximum des périodes, M. Jordan ajoute : « Toutes ces périodes sont-elles distinctes les unes

des autres, ou ne serait-il pas possible de trouver entre elles certaines relations linéaires qui en réduiraient le nombre? Ces relations existent-elles dans le cas général? ou quelles sont les conditions nécessaires pour qu'elles existent et comment pourrait-on les assigner *à priori*? Ces questions me semblent plus faciles à poser qu'à résoudre. »

On en était là en France lorsque les travaux de Riemann, publiés vers 1857, commencèrent à y être connus de quelques rares géomètres que n'avait pas rebutés l'étrangeté des conceptions géométriques auxquelles l'auteur avait cru devoir recourir, pour donner une forme à ses idées, et qui d'ailleurs pouvaient l'étudier dans sa langue.

M. Clebsch, professeur à l'Université de Giessen, avait en 1866, dans sa théorie *der Abelschen Functionen*, reproduit les principales découvertes de Riemann dans des termes moins compliqués. Mais cet ouvrage n'a pas été non plus traduit en français, de sorte qu'il est aussi fort peu connu.

La question du nombre des périodes de la quadratrice de la courbe la plus générale de degré m et la recherche des conditions dans lesquelles ce nombre se réduit me préoccupaient moi-même depuis 1854, et j'allais en présenter à l'Académie les solutions auxquelles j'étais parvenu vers 1871, lorsque j'appris que ces questions avaient été en partie traitées par MM. Riemann et Clebsch.

Cette circonstance retarda la présentation de mon mémoire, mais devait d'autant moins s'y opposer que le principe de la méthode dont je me sers et qui prend dans les œuvres de M. Clebsch la forme d'un théorème, m'appartient incontestablement, ce principe étant énoncé dans mon mémoire de 1852 sur les périodes des intégrales simples et doubles.

Au reste, la théorie de M. Clebsch laissait à désirer sous certains rapports, comme j'aurai l'occasion de le montrer, et, d'un autre côté, on reconnaîtra, je pense, que la méthode des conjuguées, qui m'avait fourni avec évidence le principe dont je viens de parler, a encore dans cette question, comme dans toutes les autres, l'avantage d'aplanir les plus grandes difficultés.

Avant de proposer les solutions que j'ai obtenues des questions indiquées dans ce qui précède, je crois pouvoir répéter que les éléments s'en trouvaient déjà complets dans le *Mémoire sur les intégrales simples et doubles* qui donna lieu au Rapport de MM. Cauchy et Sturm, en 1854.

En donnant dans ce Mémoire l'interprétation géométrique des périodes des intégrales simples et doubles, je donnais en effet le moyen de les compter dans chaque cas. D'un autre côté, la théorie des intégrales doubles, telle que je l'ai établie dans ce Mémoire, reposait précisément sur la connaissance préalable de la condition nécessaire pour que la quadratrice d'une section plane de la surface à cuber eût une période nulle, condition qui consiste en ce que le plan de cette section soit tangent à la surface, ou que la section ait un point double.

Je rappelle aussi que j'avais établi dans ce même Mémoire que les quadratrices d'une même courbe, rapportées successivement à diffé-

rents systèmes d'axes, ont toujours mêmes périodes; cette remarque était nécessaire pour expliquer l'usage que je fais du terme général de *quadratrice d'une courbe donnée*, sans spécifier le système d'axes auquel cette courbe est rapportée.

Des conditions sous lesquelles quelques périodes de la quadratrice d'une courbe de degré m *disparaissent, en devenant nulles ou infinies.*

439. Le principe de cette théorie repose sur cette notion évidente, que les quadratrices de toutes les courbes d'un même ordre ont naturellement, toutes, les mêmes périodes, exprimables par les mêmes fonctions des coefficients qui entrent dans leurs équations, c'est-à-dire que les résultats auxquels on sera parvenu en discutant la quadratrice de la courbe la plus générale de degré m pourront ensuite être transportés, sans démonstration nouvelle, à l'un quelconque des lieux du même degré, représentés par des équations à coefficients réels ou imaginaires, pouvant présenter toutes les particularités imaginables.

Ainsi la quadratrice du cercle réel

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ayant pour période $\pm\pi r^2$, la quadratrice du cercle imaginaire

$$\left(x-a-a'\sqrt{-1}\right)^2+\left(y-b-b'\sqrt{-1}\right)^2=\left(r+r'\sqrt{-1}\right)^2$$

aura pour période $\pm\pi\left(r+r'\sqrt{-1}\right)^2$.

De même, la quadratrice de la courbe représentée par l'équation

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0,$$

lorsque c'est une ellipse ou une hyperbole réelle, ayant pour période

$$\pm\pi\frac{AE^2+CD^2-2BDE+F(B^2-AC)}{(AC-B^2)^{\frac{3}{2}}},$$

cette formule représentera encore la période de la quadratrice du lieu représenté par la même équation, quels qu'en soient les coefficients; c'est-à-dire, quand même la courbe, tout en restant réelle, deviendrait parabolique; quand même la courbe deviendrait évanouissante et quand même, les coefficients de l'équation devenant imaginaires, les conjuguées de la courbe s'élèveraient au quatrième degré.

La même généralité des résultats se retrouve dans les cas les plus particuliers. Ainsi, si la courbe devient une parabole réelle, $AC-B^2$

est nul ; la période devient infinie et disparaît à ce titre, de sorte que la quadratrice redevient algébrique ; mais il en est de même, dans la même hypothèse $AC - B^2 = 0$, lorsque les coefficients de l'équation sont imaginaires.

Si $AC - B^2$ est différent de zéro et que

$$AE^2 + CD^2 - 2BDE + F(B^2 - AC)$$

soit nul, la courbe, supposée réelle, est une ellipse évanouissante ou une hyperbole réduite à ses asymptotes ; la période devient nulle et elle disparaît à ce titre ; mais il en est de même, dans la même hypothèse, lorsque les coefficients de l'équation sont imaginaires.

Si l'équation représente deux droites parallèles ou confondues, le numérateur et le dénominateur de la formule de la période deviennent nuls, la période devient indéterminée et s'évanouit encore à ce titre ; mais il en est encore de même si les deux droites représentées par l'équation deviennent imaginaires.

Si les coefficients de l'équation sont réels, la période est réelle ou imaginaire, suivant que la courbe appartient au genre ellipse ou au genre hyperbole ; mais elle reste réelle quand même l'ellipse devient imaginaire, parce que ses deux axes deviennent alors imaginaires.

440. Cela posé, il est évident, en premier lieu, que si une courbe quelconque comprend un point isolé, ou un point double, où se coupent sous un angle deux branches de la courbe, par cela seul une période doit s'être annulée : car un point isolé est un anneau réel évanouissant dont l'aire intérieure, qui eût été une période réelle, est devenue nulle ; et un point double naît toujours du rapprochement de deux branches de la courbe réelle, qui laissaient entre elles un espace comprenant un anneau de conjuguée, dont l'aire intérieure, qui eût été une période imaginaire, vient de s'évanouir.

En second lieu, si la courbe proposée a deux asymptotes rejetées à l'infini, leurs coefficients angulaires étant devenus égaux, une période doit être devenue infinie, comme cela arrive pour la parabole, dans les courbes du second degré, ou pour les courbes paraboliques du quatrième ordre que peut représenter l'équation du second degré à coefficients imaginaires.

Dans ce cas, en effet, deux branches de la courbe se rejoignent à l'infini, c'est-à-dire forment un anneau qui, ne se fermant qu'à l'infini, a une aire infinie.

Au reste, dans ce cas, la courbe a un point double à l'infini, c'est-à-dire que les trois équations

$$f(x, y) = 0, \quad f'_x = 0 \quad \text{et} \quad f'_y = 0$$

admettent la solution commune $x = \infty$, $y = \infty$. En effet l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

décomposée en groupes de termes homogènes peut alors s'écrire

$$(y - mx)^2 \varphi_{m-2}(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \ldots = 0$$

et les deux équations $f'_x = 0$ et $f'_y = 0$ deviennent

$$(y - mx)\left\{-2m\varphi_{m-2}(x,y) + (y - mx)\varphi'_{m-2,x}(x,y)\right\} + \varphi'_{m-1,x}(x,y) + \ldots = 0$$

et

$$(y - mx)\left\{2\varphi_{m-2}(x, y) + (y - mx)\varphi'_{m-2,y}(x, y)\right\} + \varphi'_{m-1,y}(x,y) + \ldots = 0$$

les deux courbes $f'_x = 0$ et $f'_y = 0$ ont donc chacune une asymptote parallèle à $y = mx$.

Je ne crois pas que cette observation se trouve dans l'Ouvrage de M. Clebsch.

Lorsque la courbe proposée a deux asymptotes parallèles, une seconde condition peut ramener la période à l'état fini : c'est celle où les deux asymptotes seraient restées à distance finie l'une de l'autre. Une foule d'exemples connus viennent confirmer cette assertion.

Enfin une troisième condition peut rendre de nouveau la période évanouissante : c'est celle en raison de laquelle les deux asymptotes parallèles viendraient en coïncidence. Dans ce cas, la période deviendra indéterminée.

Il est évident que les seuls cas à examiner sont ceux que nous venons de passer en revue, car la représentation géométrique d'une période ne peut disparaître qu'autant que cette période devient nulle ou infinie, et il est clair que l'une ou l'autre circonstance ne peut se présenter que dans l'un des cas que nous avons considérés.

Ce n'est pas à dire que les deux cas simples qui viennent d'être examinés, doivent être les seuls qu'on puisse avoir à considérer dans la pratique. En effet la présence de points triples, quadruples, etc., aura une signification plus étendue que celle d'un point double, et on pourra avoir besoin de la caractériser dans l'étude d'une équation particulière ; mais ces recherches sont étrangères au but général que nous nous proposons.

D'une réduction accessoire, dans le nombre des périodes, qui se produit par juxtaposition, lors de la formation d'un point double.

441. La formation d'un point double, à distance finie ou infinie, a toujours pour conséquence immédiate la disparition d'une période, par annulation ou accroissement indéfini ; mais il est facile de voir qu'elle

doit, en outre, être accompagnée d'une réduction accessoire, par juxtaposition ou fusion de deux périodes en une seule.

En effet, comme il suffit d'examiner un cas entièrement général pour pouvoir étendre à tous les autres les conclusions obtenues, supposons que les m asymptotes de la courbe proposée soient réelles, et que le

Fig. 31.

point double qui va se former soit un point isolé : si l'on mène à l'anneau qui va devenir un point isolé, deux tangentes parallèles quelconques et que l'on conçoive la conjuguée dont les cordes réelles seraient parallèles à ces tangentes, comme cette conjuguée n'aura pas d'asymptotes, elle ne comprendra que des anneaux fermés et ses branches tangentes à l'anneau réel presque évanouissant, entre autres, formeront, en dehors des deux tangentes, deux anneaux fermés, allant toucher un peu plus loin d'autres branches de la courbe réelle, comme l'indique la figure.

Or les produits par $\sqrt{-1}$ des aires des deux anneaux de la conjuguée formeront deux périodes imaginaires distinctes, tant que l'anneau qui

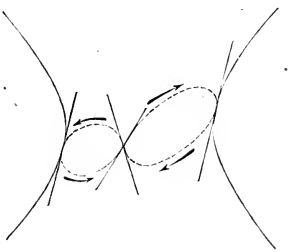


Fig. 32.

va se réduire à un point isolé ne se sera pas encore évanoui; et l'aire de l'anneau réel en constituera une troisième réelle; mais, au moment où cet anneau réel deviendra évanouissant et où la période réelle disparaîtra

en s'annulant, les deux anneaux de la conjuguée se transformeront instantanément en deux boucles, dont les branches se continueront comme l'indique la *fig.* 32, de telle sorte que, l'une des deux boucles ne pouvant plus être parcourue d'une manière continue, ce sera alors la différence des aires des deux boucles, parcourues dans le sens continu, indiqué par les flèches, qui formera la période.

Les deux périodes imaginaires se seront confondues en une seule, qui sera la limite de la différence de celles qui existaient un instant auparavant.

Ainsi la formation d'un point double entraîne la disparition simultanée de deux périodes, par l'évanouissement de l'une d'elles et par la fusion de deux autres en une seule.

C'est, à ce qu'il paraît, ce qu'ont trouvé MM. Riemann et Clebsch, en ce sens au moins qu'ils constatent la disparition effective de deux périodes, à la suite de la formation d'un point double, mais, je crois, sans expliquer cette disparition.

Des résidus relatifs aux asymptotes.

442. Si l'on rapporte une courbe de degré m à une de ses asymptotes, prise pour axe des y, son équation prend la forme

$$xy^{m-1} + (ax^2 + bx + c)\, y^{m-2} + (dx^3 + \ldots)\, y^{m-3} + \ldots = 0,$$

si, du moins, ce que nous supposerons ici, l'asymptote considérée n'est parallèle à aucune autre.

Dans ce cas, la valeur infinie de y, qui correspond à $x = 0$, change de signe en même temps que x; de sorte que la courbe est asymptote à l'axe des y, à ses deux extrémités et en sens contraires.

Si l'on mène à la courbe deux tangentes parallèles, suffisamment peu inclinées sur l'axe des y, ces tangentes comprennent entre elles un anneau de conjuguée dont l'aire intérieure, affectée du signe $\sqrt{-1}$, est une des périodes de l'intégrale quadratrice.

Lorsque la direction commune des deux tangentes qui comprennent un pareil anneau se rapproche de celle de l'axe des y, l'anneau s'aplatit en s'allongeant. A la limite, il se confond avec l'axe des y, sans toutefois que son aire ait varié.

Cette aire est facile à évaluer. En effet, si l'on pose $y = \frac{z}{x}$, l'équation devient

$$z^{m-1} + (ax^2 + bx + c)\, z^{m-2} + (dx^3 + \ldots)\, xz^{m-3} + \ldots = 0.$$

Si l'on fait $x = 0$ dans cette équation, toutes ses racines, à l'exception d'une seule, deviennent nulles, et celle-ci prend la valeur $z = -c$; il

en résulte que la racine infinie de l'équation en y pouvait être égalée à $y = \frac{-c}{x}$, et que, par suite, la quadratrice de la branche asymptote à l'axe des y pouvait être, à partir d'une valeur suffisamment petite de x, confondue avec $-c\int\frac{dx}{x}$, dont la période, $\pm 2\pi c\sqrt{-1}$, est l'aire constante d'un des anneaux dont il a été question.

Ces anneaux, quoique appartenant à un lieu du degré m, tendent à se confondre avec une ellipse indéfiniment allongée et indéfiniment aplatie, limite des conjuguées de l'hyperbole

$$xy + c = 0,$$

avec laquelle la courbe de degré m tend elle-même à se confondre, dans les environs de $x = 0$.

$2\pi c\sqrt{-1}$ est ce que nous nommons le résidu de l'intégrale quadratrice, relatif à l'asymptote considérée. Ce résidu est toujours une des périodes de la quadratrice, à quelques axes que la courbe se trouve rapportée.

Le résidu $2\pi c\sqrt{-1}$ s'évanouit avec c, de sorte que la quadratrice perd alors une période. Il est facile de caractériser cet accident au point de vue géométrique : en effet l'équation de la courbe, rapportée à l'asymptote considérée prise pour axe des y prend alors la forme

$$xy^{m-1} + x(ax + b)\,y^{m-2} + (dx^3 + \ldots)\,y^{m-3} + \ldots = 0,$$

d'où l'on voit que l'asymptote a alors trois points communs à l'infini avec la courbe. Cela n'arrive qu'à la condition d'une certaine relation entre les coefficients de l'équation de la courbe ; la quadratrice de la courbe la plus générale de degré m a donc m périodes de l'espèce spéciale des résidus, qui forment un groupe à part, et que l'on pourra désigner sous le nom de périodes cycliques (1).

---

(1) On a supposé, dans ce qui vient d'être dit, qu'en même temps qu'on prenait l'une des asymptotes de la courbe pour axe des y, on prenait une perpendiculaire à cette asymptote pour axe des x. Si l'axe des x adopté faisait avec l'asymptote considérée un angle θ, l'aire de l'anneau qui tendrait à se confondre avec cette asymptote serait représentée par

$$2\pi c \sin\theta$$

et la période correspondante serait

$$2\pi c \sin\theta\sqrt{-1}.$$

Si au lieu de prendre l'asymptote considérée pour axe des y, on dirigeait simplement l'axe des y parallèlement à cette asymptote, l'équation de la courbe prendrait la forme

$$(x-p)\,y^{m-1} + (ax^2 + bx + c)\,y^{m-2} + (dx^3 + \ldots\ldots)\,y^{m-3} + \ldots\ldots = 0,$$

p désignant l'abscisse à l'origine de l'asymptote en question, le résidu serait alors exprimé par

$$2\pi\,(ap^2 + bp + c)\sin\theta\sqrt{-1}.$$

Les m résidus relatifs aux m asymptotes d'un lieu du degré m ne sont pas indépendants les uns des autres, mais liés entre eux par une relation, du reste, unique. En effet soient

$$y = a_1 x + b_1, \quad y = a_2 x + b_2, \ldots \quad y = a_m x + b_m$$

les équations des m asymptotes d'un lieu du degré m, l'équation de ce lieu pourra se mettre sous la forme

$$(y - a_1 x - b_1) \ldots (y - a_m x - b_m) + x^{m-2} \varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots = 0;$$

si l'on y remplace y par $a_1 x + b_1$, on tombera en général sur une équation en x de degré $m - 2$, et le résidu relatif à l'asymptote $y = a_1 x + b_1$ aura dans ce cas une valeur quelconque. Pour que ce résidu fût nul, il faudrait que a_1 fût racine de $\varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0$.

Si l'on voulait que le résidu relatif à $y = a_2 x + b_2$ fût aussi nul, il faudrait de même assujettir les coefficients de l'équation du lieu à la seconde condition $\varphi_{m-2}(1, a_2) = 0$. Si l'on voulait que les résidus relatifs à $m - 2$ asymptotes fussent en même temps nuls, il faudrait établir entre les coefficients $(m - 2)$ relations qui assujettiraient la fonction $\varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right)$ à se confondre, à un facteur constant près, avec

$$\left(\frac{y}{x} - a_1\right)\left(\frac{y}{x} - a_2\right) \ldots \left(\frac{y}{x} - a_{m-2}\right).$$

On pourrait faire en sorte que le résidu relatif à l'une des deux dernières asymptotes s'annulât encore, en égalant à zéro ce facteur constant; mais on ne pourrait plus alors disposer du résidu relatif à la dernière asymptote : il serait nul de lui-même.

Ainsi : les résidus relatifs aux m asymptotes d'un lieu du degré m sont toujours liés entre eux par une relation telle que, si $m - 1$ d'entre eux sont nuls, le dernier l'est également, et cette relation est la seule qui existe généralement.

Cette relation est, du reste, facile à obtenir.

Soit

$$(y - a_1 x - b_1)(y - a_2 x - b_2) \ldots (y - a_m x - b_m) + x^{m-2} \varphi_{m-2}\left(\frac{y}{x}, 1\right) + \ldots = 0$$

l'équation d'une courbe de degré m, ayant pour asymptotes les droites

$$\begin{aligned} y &= a_1 x + b_1, \\ y &= a_2 x + b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y &= a_m x + b_m; \end{aligned}$$

pour avoir le résidu relatif à l'asymptote $y = a_1 x + b_1 = \text{tang}\,\alpha_1 x + b_1$, il faudra d'abord rendre l'axe des y parallèle à cette droite et mettre ensuite l'équation de la courbe sous la forme

$$\mathrm{M}\left(x' + \frac{b_1}{a_1}\right) y'^{m-1} + (\mathrm{N}x'^2 + \mathrm{P}x' + \mathrm{Q})\, y'^{m-2} + \ldots = 0,$$

ce qui donnera pour le résidu,

$$2\pi\sqrt{-1}\,\sin\alpha_1 \frac{\mathrm{N}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 - \mathrm{P}\frac{b_1}{a_1} + \mathrm{Q}}{\mathrm{M}}.$$

Les formules de transformation seront (les anciens axes étant supposés rectangulaires),

$$x = x' + y'\cos\alpha_1 \quad \text{et} \quad y = y'\sin\alpha_1,$$

de sorte que l'équation de la courbe deviendra

$$(-a_1x'-b_1)[y'(\sin\alpha_1 - a_2\cos\alpha_1) - a_2x' - b_2]\ldots[y'(\sin\alpha_1 - a_m\cos\alpha_1) - a_mx' - b_m] + \varphi_{m-2}(y'\sin\alpha_1,\ x' + y'\cos\alpha_1) + \ldots = 0.$$

M sera évidemment égal à

$$-a_1(\sin\alpha_1 - a_2\cos\alpha_1)(\sin\alpha_1 - a_3\cos\alpha_1)\ldots(\sin\alpha_1 - a_m\cos\alpha_1)$$

ou, en mettant en évidence le facteur $\cos^{m-1}\alpha_1$,

$$-a_1\cos^{m-1}\alpha_1(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_m).$$

Quant aux termes en y'^{m-2}, une partie en proviendra du produit

$$(-a_1x'-b_1)[y'(\sin\alpha_1 - a_2\cos\alpha_1) - a_2x' - b_2]\ldots[y'(\sin\alpha_1 - a_m\cos\alpha_1) - a_mx' - b_m]$$

mais cette partie contenant le facteur $(-a_1 x' - b_1)$, s'évanouira lorsque l'on fera $x' = -\frac{b_1}{a_1}$; le seul terme en y'^{m-2} à considérer proviendra donc de

$$\varphi_{m-2}(y'\sin\alpha_1,\ x' + y'\cos\alpha_1).$$

Soit

$$\varphi_{m-2}(y, x) = \mathrm{A}_0 y^{m-2} + \mathrm{A}_1 y^{m-3}x + \ldots + \mathrm{A}_{m-2},$$

$\varphi_{m-2}(y'\sin\alpha_1,\ x' + y'\cos\alpha_1)$ prendra la forme

$$\mathrm{A}_0(y'\sin\alpha_1)^{m-2} + \mathrm{A}_1(y'\sin\alpha_1)^{m-3}(x' + y'\cos\alpha_1) + \mathrm{A}_2(y'\sin\alpha_1)^{m-4}(x' + y'\cos\alpha_1)^2 + \text{etc.}$$

et le terme en y'^{m-2} aura évidemment pour coefficient

$$A_0 \sin^{m-2}\alpha_1 + A_1 \sin^{m-3}\alpha_1 \cos\alpha_1 + A^2 \sin^{m-4}\alpha_1 \cos^2\alpha_1 + \ldots + A_{m-2}\cos^{m-2}\alpha_1,$$

ou, en mettant en évidence le facteur $\cos^{m-2}\alpha_1$,

$$\cos^{m-2}\alpha_1 \left[A_0 a_1^{m-2} + A_1 a_1^{m-3} + A_2 a_1^{m-4} + \ldots + A_{m-2}\right],$$

c'est-à-dire

$$\cos^{m-2}\alpha_1 \, \varphi_{m-2}(a_1, 1).$$

Par conséquent l'expression du résidu est

$$2\pi\sqrt{-1}\sin\alpha_1 \frac{\cos^{m-2}\alpha_1 \varphi_{m-2}(a_1, 1)}{-a_1\cos^{m-1}\alpha_1 (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_m)}$$

ou simplement

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}\,\varphi_{m-2}(a_1, 1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_m)}.$$

Les autres résidus s'exprimeraient de même par

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}\,\varphi_{m-2}(a_2, 1)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_m)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}\,\varphi_{m-2}(a_m, 1)}{(a_m - a_1)(a_m - a_2)\ldots(a_m - a_{m-1})}.$$

Cela posé, une fonction algébrique entière de degré $m - 2$ est déterminée par les résultats de $m - 1$ substitutions. On a identiquement :

$$\begin{aligned}\varphi_{m-2}(z, 1) = {} & \frac{\varphi_{m-2}(a_1, 1)(z - a_2)(z - a_3)\ldots(z - a_{m-1})}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_{m-1})} \\ & + \frac{\varphi_{m-2}(a_2, 1)(z - a_1)(z - a_3)\ldots(z - a_{m-1})}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_{m-1})} \\ & + \ldots\ldots \\ & + \frac{\varphi_{m-2}(a_{m-1}, 1)(z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_{m-2})}{(a_{m-1} - a_1)(a_{m-1} - a_2)\ldots(a_{m-1} - a_{m-2})}.\end{aligned}$$

Il en résulte, en remplaçant z par a_m,

$$\begin{aligned}\varphi_{m-2}(a_m, 1) = {} & \frac{\varphi_{m-2}(a_1, 1)(a_m - a_2)(a_m - a_3)\ldots(a_m - a_{m-1})}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_{m-1})} \\ & + \frac{\varphi_{m-2}(a_2, 1)(a_m - a_1)(a_m - a_3)\ldots(a_m - a_{m-1})}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_{m-1})} \\ & + \ldots\ldots \\ & + \frac{\varphi_{m-2}(a_{m-1}, 1)(a_m - a_1)(a_m - a_2)\ldots(a_m - a_{m-2})}{(a_{m-1} - a_1)(a_{m-1} - a_2)\ldots(a_{m-1} - a_{m-2})},\end{aligned}$$

ou, en multipliant les deux termes de la première fraction par $(a_1 - a_m)$, les deux termes de la seconde par $(a_2 - a_m)$ et ainsi de suite, divisant les deux membres par $(a_m - a_1)(a_m - a_2) \dots (a_m - a_{m-1})$, et faisant tout passer dans le premier membre,

$$\Sigma \frac{\varphi_{m-2}(a_1, 1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_{m-1})} = 0.$$

Ainsi la somme des m résidus, ou périodes cycliques, est toujours nulle.

Conclusion.

443. Lorsqu'un lieu de degré m dégénère en un système de m droites, il présente $\frac{m(m-1)}{2}$ points doubles et les coefficients de son équation satisfont à autant de conditions particulières.

$m - 1$ de ces conditions expriment que les m résidus relatifs aux asymptotes sont nuls, puisqu'ils le sont en effet.

Si ces $m - 1$ conditions cessaient d'être satisfaites, le lieu redeviendrait irréductible et chacune des $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ conditions restantes correspondrait toujours à la présence d'un point double. Ainsi le nombre maximum de points doubles d'un lieu irréductible de degré m est

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

C'est en effet la formule à laquelle Riemann était arrivé; la démonstration qu'il en donne n'avait pas besoin de vérification, mais il est remarquable que la théorie des périodes, traitée par la méthode des conjuguées, y conduise si naturellement.

Le nombre maximum des points doubles étant $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, il en résulte que le nombre total des périodes ultra-cycliques est $(m-1)(m-2)$. D'un autre côté, le nombre des périodes cycliques est $m - 1$; par conséquent le nombre total des périodes est $(m-1)^2$; c'est-à-dire que la formule donnée par M. Jordan n'était pas, comme il semblait le craindre, susceptible de réduction.

Cela posé, la solution du problème de la classification des quadratrices des courbes algébriques est maintenant complète.

Les courbes de degré m quarrables algébriquement sont celles qui ont $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles et que leurs asymptotes coupent toutes en trois points situés à l'infini.

Les courbes de degré m, quarrables au moyen des fonctions circulaires seulement, sont celles qui ont $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles. Ce sont celles que M. Hermite appelle *unicursales;* leurs quadratrices ont $m-1$ périodes cycliques au plus.

Celles qui ont $\frac{(m-1)(m-2)}{2}-1$ points doubles sont quarrables par les intégrales elliptiques, etc.

Cette théorie est, comme on le voit, plus complète à la fois que celle de M. Jordan et que celle de M. Clebsch; elle les remplace l'une et l'autre sans rien en emprunter, et elle est infiniment plus simple.

Elle ne procède absolument que de la méthode des conjuguées, et repose entièrement sur ce principe, que les périodes des intégrales sont les aires des anneaux fermés de la courbe réelle ou de ses conjuguées, que j'avais établi dès 1851.

Formule du produit des périodes de la quadratrice d'une courbe de degré m.

444. La théorie précédente suggère une remarque qui pourra n'être pas immédiatement utilisable, mais que les géomètres apprécieront sans doute, sachant combien les premiers éléments de théories destinées à recevoir plus tard de grands développements, sont souvent insignifiants en apparence.

Pour qu'une des périodes ultra-cycliques de la quadratrice d'une courbe de degré m, $f(x, y) = 0$, devienne nulle, il faut que la courbe acquière un point double; le produit des périodes doit donc contenir en facteur une certaine puissance du premier membre de la condition que les coefficients devraient remplir pour que la courbe eût un point double, c'est-à-dire de la condition que l'on obtiendrait en éliminant x et y entre les équations

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{df}{dx} = 0.$$

D'un autre côté, pour qu'une des périodes ultra-cycliques de la quadratrice devienne infinie, il faut que deux asymptotes de la courbe, devenues parallèles, soient rejetées à l'infini; le produit des périodes ultra-cycliques doit donc contenir en dénominateur une certaine puissance du premier membre de la condition que devraient remplir les coefficients des termes du plus haut degré pour que l'ensemble de ces termes, égalé à zéro, fournît deux droites confondues.

Soient Δ et I les premiers membres de ces conditions, le produit de toutes les périodes ultra-cycliques de la quadratrice sera

$$P = \Omega \frac{\Delta^\delta}{I^i},$$

δ et i désignant les exposants encore inconnus des puissances dont il vient d'être parlé et Ω une constante, dépendant seulement de m, puisque ce facteur ne saurait devenir ni nul ni infini, pour aucun système de valeurs des coefficients.

Δ et I devront être séparément des fonctions homogènes des coefficients de l'équation proposée qui y entreront, car les conditions qu'elles expriment ne dépendent que des rapports des coefficients à l'un d'eux.

D'un autre côté, δ et i devront dépendre l'un de l'autre par cette condition que

$$\frac{\Delta^\delta}{I^i}$$

ne varie pas non plus lorsqu'on multipliera tous les coefficients de l'équation par un même nombre, puisque le produit des périodes ne devra pas alors changer.

En conséquence, si le premier membre de l'équation qui résulterait de l'élimination de x et de y entre

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{df}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy} = 0$$

est de degré k par rapport aux coefficients et que h soit celui de l'équation qui résulterait de l'élimination de c entre

$$\varphi(1, c) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'_c(1, c) = 0,$$

$\varphi(x, y)$ désignant l'ensemble des termes de degré m de l'équation proposée, on devra avoir

$$\delta k = ih,$$

d'où $i = \delta \frac{k}{h}$; et il en résultera

$$P = \Omega \left[\frac{\Delta}{I^{\frac{k}{h}}} \right]^\delta.$$

Enfin δ se déterminera par les considérations suivantes : si l'on suppose numériques les coefficients des termes de degré m de l'équation proposée, ceux des termes de degré $m - 1$ seront linéaires, ceux des termes de degré $m - 2$ seront de la seconde dimension et ainsi de suite. D'ailleurs Δ et I seront séparément homogènes. Cela posé, si

$$\frac{\Delta}{I^{\frac{k}{h}}}$$

est de degré l, comme le produit P devra être de degré $2(m-1)(m-2)$, puisqu'il y aura $(m-1)(m-2)$ périodes ultra cycliques, on devra avoir

$$l\delta = 2(m-1)(m-2),$$

d'où

$$\delta = \frac{2(m-1)(m-2)}{l}.$$

Quant au produit des périodes cycliques, ce sera le produit de $\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^{m-1}$ par une certaine puissance du premier membre de l'équation qui exprimerait que l'un des résidus fût nul. Soit R ce premier membre, le produit des périodes cycliques sera donc

$$\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^{m-1} \mathrm{R}^{\delta'}$$

et on déterminera δ' par la condition que cette expression soit de la dimension $2(m-1)^2$; si l' est la dimension de R, on aura $\delta' = \frac{2(m-1)^2}{l'}$, et le produit de toutes les périodes sera exprimé par

$$\Omega \left[\frac{\Delta}{\Gamma_1^{\frac{k}{h}}}\right]^{\frac{2(m-1)(m-2)}{l}} \left(2\pi\sqrt{-1}\right)^{m-1} \mathrm{R}^{\frac{(2m-1)^2}{l'}}.$$

Quant à Ω, on le déterminera exactement ou par approximation sur un exemple particulier.

De la courbe du troisième degré quarrable algébriquement.

445. L'équation d'une courbe du troisième degré rapportée à l'une de ses asymptotes prise pour axe des y est

$$xy^2 + (ax^2 + bx + c)y + dx^3 + ex^2 + fx + h = 0.$$

Si l'on veut que le résidu relatif à l'axe des y soit nul, il faut faire $c = 0$, alors les deux valeurs de y sont équidistantes de

$$-\frac{ax+b}{2};$$

c'est-à-dire que les cordes parallèles à l'axe des y ont pour diamètre la droite

$$y = -\frac{ax+b}{2}.$$

Ainsi, dans les courbes du troisième ordre, le diamètre conjugué des cordes parallèles à une asymptote dont le résidu est nul, est une droite.

Si les trois résidus sont nuls, les diamètres conjugués des cordes parallèles aux trois asymptotes seront séparément rectilignes.

Mais quand une courbe a un diamètre rectiligne, ses asymptotes, prises deux à deux, viennent se couper sur ce diamètre et forment des systèmes dont les cordes parallèles à celles de la courbe auxquelles correspond le diamètre rectiligne, ont elles-mêmes leurs milieux sur ce diamètre.

Par conséquent, si les trois périodes cycliques d'une courbe du troisième ordre sont nulles, la courbe admettra pour diamètres rectilignes les médianes du triangle formé par les trois asymptotes.

D'un autre côté, si une courbe pourvue d'un diamètre rectiligne a un point double unique, ce point double devra se trouver sur le diamètre. Par conséquent la courbe quarrable du troisième ordre devra avoir pour point double le centre de gravité du triangle des asymptotes.

Soient m le tiers d'une des médianes de ce triangle et a la moitié de la base correspondante; si l'on prend pour origine le point double, pour axe des x la médiane, dirigée du point double vers le côté $2a$, et pour axe des y la parallèle à ce côté, l'équation de la courbe sera

$$(x-m)\left(\frac{3y}{2a}-\frac{x}{2m}-1\right)\left(-\frac{3y}{2a}-\frac{x}{2m}-1\right)+\mathrm{H}=0,$$

H devant être tel que l'origine soit un point double, condition en apparence triple, mais qui se réduit à

$$\mathrm{H}-m=0,$$

les termes du premier degré en x et en y s'en allant d'eux-mêmes.

Ainsi, la courbe du troisième degré quarrable algébriquement est

$$\frac{(x+2m)^2}{4m^2}-\frac{9y^2}{4a^2}+\frac{m}{x-m}=0$$

ou

$$y=\frac{ax}{3m}\sqrt{\frac{x+3m}{x-m}}.$$

Lorsque cette courbe a ses trois asymptotes réelles, elle a la figure ci-dessous. Je lui ai donné le nom de *Trèfle*.

Quand la courbe a deux asymptotes imaginaires, c'est une projection orthogonale ou oblique du folium de Descartes.

En effet, si l'on rapporte le folium

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0$$

à son axe de symétrie pris pour axe des x, et à la perpendiculaire menée par le point double, pour axe des y, l'équation de la courbe devient

$$y = \frac{x}{3}\sqrt{\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}a - x}{\frac{a}{\sqrt{2}} + x}}.$$

Les deux courbes sont d'ailleurs, comme on voit, conjuguées l'une de l'autre.

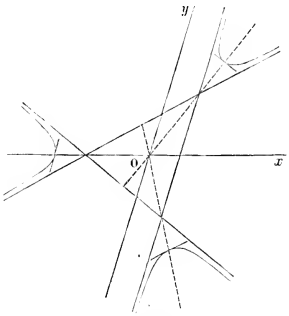


Fig. 33.

L'équation du trèfle peut être réduite à

$$y = kx\sqrt{\frac{x + 3m}{x - m}}.$$

Si l'on y remplace k et m par $k + k'\sqrt{-1}$ et $m + m'\sqrt{-1}$, on aura un lieu

$$y = (k + k'\sqrt{-1})\,x\sqrt{\frac{x + 3(m + m'\sqrt{-1})}{x - (m + m'\sqrt{-1})}}$$

dont les conjuguées, du neuvième degré, seront également quarrables algébriquement.

Sur la courbe la plus générale du quatrième degré quarrable algébriquement.

446. Toute projection orthogonale ou oblique, sur un plan quelconque, d'une courbe quarrable algébriquement, est aussi quarrable algébriquement; parce que la projection est de même degré que la courbe projetée, qu'elle présente le même nombre de points doubles, et que chacune de ses asymptotes la coupe en autant de points à l'infini que l'asymptote dont elle est la projection coupait elle-même à l'infini la courbe projetée.

Nous pourrons donc nous borner à la recherche de la projection la plus simple possible de la courbe la plus générale du quatrième degré quarrable algébriquement.

Or, on peut toujours transformer par projection un triangle quelconque en un triangle équilatéral. En effet, si par l'un des côtés du triangle on fait passer un plan quelconque, et que, sur le côté considéré du triangle, on construise, dans le plan choisi, un triangle équilatéral, il suffira, pour transformer le proposé dans ce triangle équilatéral, de le projeter parallèlement à la ligne qui joindrait les troisièmes sommets.

Nous pourrons donc supposer que les trois points doubles de la courbe cherchée forment les sommets d'un triangle équilatéral, dont nous désignerons le côté par d.

Si nous rapportons cette courbe à deux des côtés du triangle des points doubles, pris pour axes de coordonnées, les trois points doubles auront pour coordonnées

$$[x=0,\ y=0],\quad [x=d,\ y=0],\quad [x=0,\ y=d].$$

D'un autre côté, en représentant par

$$\begin{aligned} y &= a_1 x + b_1, \\ y &= a_2 x + b_2, \\ y &= a_3 x + b_3, \\ y &= a_4 x + b_4 \end{aligned}$$

les équations des quatre asymptotes, l'équation de la courbe devra être

$$(y-a_1x-b_1)(y-a_2x-b_2)(y-a_3x-b_3)(y-a_4x-b_4)+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0,$$

pour que chacune des quatre asymptotes coupe la courbe en trois points situés à l'infini.

Mais les constantes A, B, C, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4 devront satisfaire à neuf conditions exprimant que les trois points définis plus haut sont des points doubles.

Pour que l'origine soit un point double, il faudra que

$$b_1b_2b_3b_4 + C = 0,$$

$$-b_1b_2b_3 - b_2b_3b_4 - b_3b_4b_1 - b_4b_1b_2 + B = 0,$$

$$a_1b_2b_3b_4 + a_2b_3b_4b_1 + a_3b_4b_1b_2 + a_4b_1b_2b_3 + A = 0 :$$

équations qui déterminent A, B et C.

Si l'on transporte l'origine des coordonnées au point $x = 0$, $y = d$, l'équation de la courbe devient

$$(y+d-a_1x-b_1)(y+d-a_2x-b_2)(y+d-a_3x-b_3)(y+d-a_4x-b_4) + Ax + B(y+d) + C = 0,$$

et, pour exprimer que la nouvelle origine est un point double, on aura les trois conditions

$$(d-b_1)(d-b_2)(d-b_3)(d-b_4) + Bd + C = 0,$$

$$(d-b_2)(d-b_3)(d-b_4) + (d-b_3)(d-b_4)(d-b_1) + (d-b_4)(d-b_1)(d-b_2) + (d-b_1)(d-b_2)(d-b_3) + B = 0,$$

$$-a_1(d-b_2)(d-b_3)(d-b_4) - a_2(d-b_3)(d-b_4)(d-b_1) - a_3(d-b_4)(d-b_1)(d-b_2) - a_4(d-b_1)(d-b_2)(d-b_3) + A = 0.$$

En remplaçant dans les deux premières équations de ce second groupe B et C par leurs valeurs tirées des deux premières du premier groupe, elles deviennent

$$d^2 - d\Sigma b_1 + \Sigma b_1b_2 = 0$$

et

$$4d^2 - 3d\Sigma b_1 + 2\Sigma b_1b_2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\Sigma b_1 = 2d \quad \text{et} \quad \Sigma b_1b_2 = d_2,$$

entre les ordonnées à l'origine b_1, b_2, b_3 et b_4 des quatre asymptotes.

Ces équations se traduisent d'elles-mêmes, mais on peut encore les transformer avec avantage : si l'on désigne par b'_1 la distance du milieu du côté du triangle des points doubles, couché sur l'axe des y, au point de rencontre de ce même côté avec l'asymptote $y = a_1x + b_1$, cette distance étant comptée positivement dans le sens des y positifs, b_1 sera égal à $\frac{d}{2} + b'_1$; par conséquent, les conditions précédentes s'exprime-

ront par

$$\Sigma\left(\frac{d}{2}+b'_1\right)=2d$$

et

$$\Sigma\left(\frac{d}{2}+b'_1\right)\left(\frac{d}{2}+b'_2\right)=d^2$$

ou

$$\Sigma b'_1=0 \quad \text{et} \quad \Sigma b'^2_1=d^2.$$

On trouverait naturellement des conditions identiques pour les autres côtés du triangle des points doubles.

Ainsi, les conditions sont que le milieu de chaque côté du triangle des points doubles soit le centre des moyennes distances des points de rencontre de ce côté avec les quatre asymptotes et que la somme des carrés des mêmes distances soit égale au carré d'un côté du triangle devenu équilatéral.

CHAPITRE XXXVIII

CLASSIFICATION DES INTÉGRALES CUBATRICES DES SURFACES ALGÉBRIQUES

447. Les périodes numériques de l'intégrale double cubatrice d'une surface sont les volumes enveloppés par les nappes fermées de cette surface, ou les produits par $\sqrt{-1}$ des volumes enveloppés par les nappes fermées de ses conjuguées.

Pour les obtenir, il suffit de former les intégrales du type $\int \omega dy$, ω désignant une des périodes, fonctions de y, de la quadratrice de la section de la surface par un plan mobile, parallèlement à lui-même, auquel on aurait rendu le plan des xz parallèle, chacune de ces intégrales devant d'ailleurs être prise entre les limites pour lesquelles ω s'annule, c'est-à-dire entre les ordonnées de deux plans tangents à la surface, parallèles au plan des xz.

On pourra désigner sous le nom de périodes sphériques les périodes de l'intégrale double qui proviendront des périodes cycliques de l'intégrale simple. Toutes les autres prendront alors le nom commun de périodes ultra-sphériques.

Si l'une des périodes cycliques de la quadratrice d'une section parallèle au plan des xz est constamment nulle, la période sphérique correspondante sera aussi nulle; cela arrivera lorsque la section parallèle au plan des xz aura constamment une asymptote qui la coupe en trois points situés à l'infini.

Si l'une des périodes ultra-cycliques de la quadratrice d'une section parallèle au plan des xz est constamment nulle, la période ultra-sphérique correspondante sera nulle aussi. Cela arrivera lorsque la section aura constamment un point double. Mais on sait de plus que, dans ce cas, deux autres des périodes ultra-cycliques de la quadratrice de la section se fondront en une seule, d'où résultera une réduction correspondante dans le nombre des périodes ultra-sphériques de l'intégrale double.

Supposer que la section parallèle au plan des xz ait constamment un point double, c'est supposer que la surface $f(x, y, z) = 0$ présente une courbe double.

Si une surface $f(x, y, z) = 0$ présente une courbe double, la courbe

$$f(x, h, z) = 0$$

aura un point double, quel que soit h, c'est-à-dire que les équations

$$f(x, h, z) = 0, \quad f'_x(x, h, z) = 0, \quad f'_z(x, h, z) = 0$$

auront une solution commune, quel que soit h. Réciproquement, s'il existe une courbe double dans une surface, les points suivant lesquels elle sera coupée par un plan quelconque seront des points doubles de la section de la surface par ce plan. Si la surface est de degré m, sa section par un plan quelconque sera de degré m et ne pourra pas présenter plus de

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

points doubles. Une ligne double d'une surface de degré m ne saurait donc être coupée par un plan quelconque en plus de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points. Cette ligne double ne peut être au plus que du degré $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

Si une surface de degré m présente une courbe double du degré

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

la cubatrice de cette surface n'aura aucune période ultra-sphérique.

Si la courbe double que présente la surface est du degré

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - k,$$

la quadratrice d'une section plane quelconque aura $2k$ périodes ultra-cycliques.

Les périodes numériques de la cubatrice pourraient s'annuler sans que les périodes correspondantes des quadratrices des sections parallèles à un plan choisi fussent constamment nulles, si les plans où ces périodes s'annulent venaient à se confondre.

D'un autre côté, le nombre des périodes numériques ultra-sphériques pourra s'élever beaucoup au delà du double $2k$ de l'excès du degré maximum de la ligne double sur le degré effectif de cette ligne, parce que la même période ultra-cyclique de la quadratrice d'une section plane de la surface pourra s'annuler dans un grand nombre de plans tangents (on va voir que cela ne saurait arriver pour les périodes cycliques), mais le nombre des périodes numériques de la cubatrice n'est pas ce qu'il y a d'intéressant dans la théorie. C'est le nombre des périodes de la quadratrice d'une section mobile parallèle à un plan quelconque qui affecte surtout la nature de la cubatrice.

448. Soit

$$\varphi(x, y, z) + \psi(x, y, z) + \chi(x, y, z) + \ldots = 0$$

l'équation de la surface la plus générale de degré m décomposée en groupes de termes homogènes, de sorte que φ, ψ, χ, etc., soient des polynômes homogènes de degrés m, $m-1$, $m-2$, etc

Soient d'ailleurs

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$$

les équations d'une direction asymptotique, de sorte que $\varphi(\alpha, \beta, 1) = 0$, et

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z}{1}$$

les équations d'une parallèle à cette direction: si l'on veut avoir les intersections de cette parallèle avec la surface on pourra remplacer dans l'équation proposée x, y et z par

$$x_0 + \alpha\rho, \quad y_0 + \beta\rho \quad \text{et} \quad \rho,$$

ce qui donnera

$$\rho^m \varphi(\alpha, \beta, 1) + \rho^{m-1}[x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1)]$$
$$+ \frac{\rho^{m-2}}{1.2}[x_0^2\varphi''_{\alpha^2} + y_0^2\varphi''_{\beta^2} + 2x_0y_0\varphi''_{\alpha\beta} + 2x_0\psi'_\alpha + 2y_0\psi'_\beta + 2\chi(\alpha, \beta, 1)]$$
$$+ \ldots = 0.$$

Mais le terme en ρ^m disparaîtra de lui-même, $\varphi(\alpha, \beta, 1)$ étant supposé nul.

Si l'on veut exprimer que la droite

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z}{1}$$

est une asymptote, il faudra poser

$$(1) \qquad x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

ce qui donnera une relation entre les coordonnées x_0, y_0 de la trace sur le plan des x y de l'asymptote parallèle à la direction $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$, d'où l'on voit que les asymptotes parallèles à une même direction asymptotique sont généralement dans un même plan.

Si l'on voulait déterminer les asymptotes parallèles à la même direction, qui rencontrent la surface en trois points situés à l'infini, il faudrait poser la nouvelle condition

$$(2) \qquad x_0^2\varphi''_{\alpha^2} + y_0^2\varphi''_{\beta^2} + 2x_0y_0\varphi''_{\alpha\beta} + 2x_0\psi'_\alpha + 2y_0\psi'_\beta + 2\chi(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

d'où l'on voit, comme cela avait été annoncé, que parmi toutes les

asymptotes parallèles à une même direction, il y en aura généralement deux et deux seulement qui rencontrent la surface en trois points situés à l'infini; ou, ce qui revient au même, que si un plan quelconque se déplace parallèlement à lui-même, chacune des périodes cycliques de la quadratrice de la section de la surface par ce plan mobile s'annulera deux fois et deux fois seulement, de façon qu'on ne trouvera jamais pour la cubatrice que m périodes sphériques numériques.

449. Si l'on voulait exprimer que les deux asymptotes parallèles à $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{1}$, qui rencontrent la surface en trois points situés à l'infini, se confondent et que la période sphérique numérique correspondante s'annule, il faudrait éliminer x_0, par exemple, entre les équations (1) et (2) et exprimer la condition pour que l'équation restante en y_0 eût ses deux racines égales.

L'équation (1) donne

$$x_0 = -\,y_0\frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha} - \frac{\psi(\alpha,\beta,1)}{\varphi'_\alpha};$$

en substituant dans l'équation (2), il vient

$$\begin{aligned}
&y_0^2\left[\varphi''_{\alpha^2}\frac{\varphi'^2_\beta}{\varphi'^2_\alpha}+\varphi''_{\beta^2}-2\varphi''_{\alpha\beta}\frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha}\right]\\
&+y_0\left[2\varphi''_{\alpha^2}\frac{\varphi'_\beta\psi(\alpha,\beta,1)}{\varphi'^2_\alpha}-2\frac{\varphi''_{\alpha\beta}}{\varphi'_\alpha}\psi(\alpha,\beta,1)-2\frac{\psi'_\alpha\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha}+2\psi'_\beta\right]\\
&+\varphi''_{\alpha^2}\frac{\psi^2(\alpha,\beta,1)}{\varphi'^2_\alpha}-2\frac{\psi'_\alpha}{\varphi'_\alpha}\psi(\alpha,\beta,1)+2\chi(\alpha,\beta,1)=0.
\end{aligned}$$

La condition cherchée est donc

$$\begin{aligned}
&\left[\varphi''_{\alpha^2}\frac{\varphi'_\beta\psi(\alpha,\beta,1)}{\varphi'^2\alpha}-\frac{\varphi''_{\alpha\beta}}{\varphi'_\alpha}\psi(\alpha,\beta,1)-\frac{\psi'_\alpha\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha}+\psi'_\beta\right]^2\\
&-\left[\varphi''_{\alpha^2}\frac{\varphi'^2_\beta}{\varphi'^2_\alpha}+\varphi''_{\beta^2}-2\varphi''_{\alpha\beta}\frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha}\right]\left[\varphi''_{\alpha^2}\frac{\psi^2(\alpha,\beta,1)}{\varphi'^2_\alpha}-2\frac{\psi'_\alpha}{\varphi'_\alpha}\psi(\alpha,\beta,1)+2\chi(\alpha,\beta,1)\right]=0
\end{aligned}$$

ou

$$\text{(A)}\qquad \left[(\varphi''_{\alpha^2}\varphi'_\beta-\varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha)\psi(\alpha,\beta,1)-\psi'_\alpha\varphi'_\beta\varphi'_\alpha+\psi'_\beta\varphi'^2_\alpha\right]^2$$
$$-\left[\varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta-2\varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta+\varphi''_{\beta^2}\varphi'^2_\alpha\right]\left[\varphi''_{\alpha^2}\psi^2(\alpha,\beta,1)-2\psi'_\alpha\varphi'_\alpha\psi(\alpha,\beta,1)+2\chi(\alpha,\beta,1)\varphi'^2_\alpha\right]=0.$$

Si φ, ψ et χ satisfaisaient identiquement à cette condition, quels que fussent α et β liés entre eux par la relation $\varphi(\alpha,\beta,1)=0$, toutes les périodes sphériques numériques seraient nulles.

Mais, comme nous l'avons déjà dit, ce point est peu important.

450. Pour que la période cyclique, relative à l'asymptote parallèle à $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{1}$, de la quadratrice d'une section plane mobile parallèle à

cette direction, restât toujours identiquement nulle, c'est-à-dire pour que la période sphérique correspondante qui, autrement, varierait avec les limites, restât constamment nulle, il faudrait qu'en éliminant x_0, par exemple, entre les équations (1) et (2), ou tombât sur une équation identique en y_0. Ces conditions sont

$$\text{(B)} \qquad \varphi''_{\alpha^2}\frac{\varphi'^2_\beta}{\varphi'^2_\alpha}+\varphi''_{\beta^2}-2\varphi''_{\alpha\beta}\frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha}=0;$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{2\varphi''_{\alpha^2}}{\varphi'^2_\alpha}\varphi'_\beta\psi(\alpha,\beta,1)-2\frac{\varphi''_{\alpha\beta}}{\varphi'_\alpha}\psi(\alpha,\beta,1)-2\frac{\psi'_\alpha\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha}+2\psi'_\beta=0;$$

$$\text{(D)} \qquad \frac{\varphi''_{\alpha^2}}{\varphi'^2_\alpha}\psi^2(\alpha,\beta,1)-2\psi'_\alpha\frac{\psi(\alpha,\beta,1)}{\varphi'_\alpha}+2\chi(\alpha,\beta,1)=0.$$

Si l'on veut que ces conditions soient satisfaites quels que soient α et β, c'est-à-dire si l'on veut que toutes les périodes sphériques de la cubatrice disparaissent, ces trois conditions devront être considérées comme des équations aux différentielles partielles, dont φ, ψ et χ seraient les inconnues.

Ces équations en apparence très-compliquées sont heureusement faciles à intégrer. Ainsi d'abord l'équation

$$\varphi''_{\alpha^2}\frac{\varphi'^2_\beta}{\varphi'^2_\alpha}+\varphi''_{\beta^2}-2\varphi''_{\alpha\beta}\frac{\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha}=0$$

ou

$$\varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta-2\varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\beta\varphi'_\alpha+\varphi''_{\beta^2}\varphi'^2_\alpha=0,$$

qui se rapporte exclusivement à la fonction φ, exprime que le cône, lieu des parallèles aux asymptotes menées par l'origine, est formé d'un système de m plans.

En effet l'équation de ce cône est $\varphi(x, y, z) = 0$, de sorte que $\varphi(x, y, 1) = 0$ est l'équation dans son plan de la section de ce cône par le plan $z = 1$. Or, pour exprimer que le lieu $\varphi(x, y, 1) = 0$ se compose de droites, il faudrait exprimer que $\frac{d^2y}{dx^2}$, en un quelconque de ses points, est nul, et c'est précisément ce qu'exprime l'équation (B), car l'équation $\varphi(x, y, 1) = 0$ donne d'abord

$$\varphi'_y\frac{dy}{dx}+\varphi'_x=0$$

et ensuite

$$\varphi'_y\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi''_{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\varphi''_{xy}\frac{dy}{dx}+\varphi''_{x^2}=0,$$

ou, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$

$$\varphi'_y \frac{d^2y}{dx^2} + \varphi''_{y^2} \frac{\varphi'^2_x}{\varphi'^2_y} - 2\varphi''_{xy} \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} + \varphi''_{x^2} = 0,$$

d'où l'on voit que la condition

$$\varphi''_{y^2}\varphi'^2_x - 2\varphi''_{xy}\varphi'_x\varphi'_y + \varphi''_{x^2}\varphi'^2_y = 0$$

revient à

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Ainsi la fonction $\varphi(x, y, z)$ doit être le produit de m facteurs linéaires.

$$(A_1x + B_1y + C_1z), \quad (A_2x + B_2y + C_2z)\ldots \quad (A_mx + B_my + C_mz).$$

En second lieu, l'équation (C),

$$[\varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta - \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha]\,\psi(\alpha, \beta, 1) - \varphi'_\alpha[\psi'_\alpha\varphi'_\beta - \psi'_\beta\varphi'_\alpha] = 0,$$

exprime que toutes les asymptotes sont effectivement contenues dans m plans.

En effet toutes les asymptotes infiniment peu inclinées les unes sur les autres doivent déjà être parallèles à un même des plans représentés par l'équation $\varphi(x, y, z) = 0$, car une asymptote variable de direction d'une matière continue ne pourrait changer de plan directeur qu'en prenant momentanément la direction de l'intersection de son ancien plan directeur avec l'un des $(m - 1)$ autres. De sorte que si la droite

$$x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1) = 0, \tag{1}$$

lieu des traces sur le plan des xy des asymptotes parallèles à la direction $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$, ne change pas lorsque α et β varieront infiniment peu, ou varieront dans de certaines limites, toutes les asymptotes correspondantes seront dans un même plan.

Or, c'est précisément l'invariabilité de la droite

$$x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1) = 0$$

qu'exprime l'équation (C).

En effet si l'on fait varier dans l'équation (1) α de $d\alpha$ et β de $d\beta$, elle devient

$$x_0[\varphi'_\alpha + \varphi''_{\alpha^2}d\alpha + \varphi''_{\alpha\beta}d\beta] + y_0[\varphi'_\beta + \varphi''_{\beta^2}d\beta + \varphi''_{\alpha\beta}d\alpha] + \psi(\alpha,\beta,1) + \psi'_\alpha d\alpha + \psi'_\beta d\beta = 0,$$

et si l'on veut exprimer que les deux droites coïncident, il faudra exprimer que les accroissements des coefficients sont proportionnels aux anciennes valeurs de ces coefficients, ce qui donnera

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2}d\alpha+\varphi''_{\alpha\beta}d\beta}{\varphi'_\alpha}=\frac{\varphi''_{\beta^2}d\beta+\varphi''_{\alpha\beta}d\alpha}{\varphi'_\beta}=\frac{\psi'_\alpha d\alpha+\psi'_\beta d\beta}{\psi(\alpha,\beta,1)};$$

en divisant par $d\alpha$ et remplaçant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ par $-\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta}$ ces équations deviennent

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2}-\varphi''_{\alpha\beta}\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta}}{\varphi'_\alpha}=\frac{-\varphi''_{\beta^2}\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta}+\varphi''_{\alpha\beta}}{\varphi'_\beta}=\frac{\psi'_\alpha-\psi'_\beta\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta}}{\psi(\alpha,\beta,1)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta-\varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha\varphi'^2_\beta}=\frac{-\varphi''_{\beta^2}\varphi'^2_\alpha+\varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha\varphi'^2_\beta}=\frac{\psi'_\alpha\varphi'_\beta-\psi'_\beta\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta\psi(\alpha,\beta,1)}$$

la première de ces conditions

$$\varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta-\varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta=-\varphi''_{\beta^2}\varphi'^2_\alpha+\varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta$$

n'est autre que la condition (B) déjà traitée, quant à l'autre,

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta-\varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha\varphi'^2_\beta}=\frac{\psi'_\alpha\varphi'_\beta-\psi'_\beta\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta\psi(\alpha,\beta,1)},$$

elle se réduit précisément à l'équation (C)

$$[\varphi''_{\alpha^2}\varphi'_\beta-\varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha]\,\psi(\alpha,\beta,1)-\varphi'_\alpha[\psi'_\alpha\varphi'_\beta-\psi'_\beta\varphi'_\alpha]=0.$$

Ainsi les équations (B) et (C) expriment que toutes les asymptotes de la surface doivent être comprises dans m plans.

Quant à l'équation (D), il est inutile d'en chercher la traduction : puisqu'elle exprime que chacune des asymptotes coupe la surface en un troisième point situé à l'infini, elle doit exprimer que chacun des m plans asymptotes coupe la surface suivant une courbe de degré $(m-3)$ seulement.

451. Les conditions (B), (C) et (D) sont du reste faciles à réaliser. En effet, supposons que

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

représente l'un des m plans en question, l'équation de la surface pourra se mettre sous la forme

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)\varphi_{m-1}(x,y,z)+\Phi_{m-3}(x,y,z)=0,$$

Φ_{m-3} désignant un polynôme complet en x, y, z de degré $m-3$.

De même, si

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

est l'équation du second des m plans en question, l'équation de la surface devra, par les mêmes raisons, être de la forme

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)\varphi_{m-2}(x,y,z)+\Phi_{m-3}(x,y,z)=0$$

et ainsi de suite, de sorte que si

$$A_mx+B_my+C_mz+D_m=0$$

est l'équation du dernier plan en question, l'équation de la surface sera

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)\dots(A_mx+B_my+C_mz+D_m)+\Phi_{m-3}(x,y,z)=0$$

452. Les conditions précédemment exprimées ne suffiraient pas encore pour que la cubatrice de la surface n'eût aucune période. En effet si on coupe la surface dont on vient de poser l'équation par un plan quelconque

$$Rx+Sy+Tz+U=0,$$

les asymptotes de la section seront bien les intersections du plan sécant avec les m plans qui forment l'enveloppe des plans asymptotes et chacun de ces m plans coupant la surface suivant une courbe du degré $(m-3)$ seulement, les asymptotes de la section auront bien trois points communs à l'infini avec cette section. Mais pour que les résidus relatifs aux asymptotes de la section soient nuls, il faudra que cette section soit effectivement du degré m. Or il en sera bien ainsi si le plan sécant est quelconque, mais non pas s'il est parallèle à l'un des plans asymptotes. La section par un pareil plan ne serait plus que du degré $(m-1)$ et ses asymptotes la coupant en $(m-3)$ points à distance finie n'auraient avec elle que deux points communs à l'infini, le résidu relatif à l'une quelconque d'entre elles serait différent de zéro et ce résidu engendrerait une période de l'intégrale double.

Pour que ces dernières périodes disparaissent aussi, il faudra donc que les asymptotes des sections par des plans parallèles aux plans asymptotes ne rencontrent la surface qu'en $m-4$ points situés à distance finie.

Pour exprimer cette dernière condition, nous remarquerons que la projection sur le plan des xy, par exemple, de la section d'une surface par un plan quelconque est coupée par une de ses asymptotes en autant de points à distance infinie que la section elle-même l'est par son asymptote correspondante, de sorte que la condition qui nous occupe pourra être exprimée par rapport aux projections sur le plan des xy des sections de la surface par les plans parallèles à ses plans asymptotes.

Soit

$$A_px+B_py+C_pz+D_p+H=0$$

l'équation d'un plan parallèle à l'un des plans asymptotes et supposons que cette équation donne

$$z=a_px+b_py+h_p$$

où a_p et b_p seront constants, l'équation de la projection de la section sur le plan des xy sera

$$[(A_1+C_1a_p)x+(B_1+C_1b_p)y+D_1+C_1h_p]\ldots[(A_m+C_ma_p)x+(B_m+C_mb_p)y+D_m+C_mh_p] + \Phi_{m-3}(x, y, a_px+b_py+h_p)=0,$$

et comme

$$\begin{aligned}(A_1 + C_1a_p)\,x + (B_1 + C_1b_p)\,y + D_1 + C_1h_p &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\

asymptotes des sections parallèles aux m plans asymptotes de la surface ne coupent ces sections qu'en $(m-4)$ points à distance finie.

454. Nous ferons remarquer, en terminant cette théorie générale, que le cylindre parabolique $y^2 = 2px$, seule surface du second ordre irréductible dont tous les segments prismatiques puissent être cubés algébriquement, remplit bien toutes les conditions imposées par la théorie. En effet il contient à l'infini une droite double parallèle aux z; les asymptotes de toutes les sections sont comprises dans les deux plans $y = \pm\infty$; enfin l'asymptote de la section de la surface par un plan $y = h$ parallèle aux deux plans asymptotes, se confondant avec cette section elle-même remplit par conséquent la condition de la couper à l'infini en trois points.

Le paraboloïde hyperbolique qui s'approche ensuite le plus d'une surface capable de cubature algébrique, a bien une ligne double à l'infini et satisfait bien d'ailleurs à la condition représentée par l'équation (B), il satisfait même aussi à la condition (D), mais il ne satisfait pas à la condition (C). Tous ses plans asymptotes sont parallèles à deux plans, mais il y en a une infinité.

Application aux surfaces du troisième ordre.

455. Les surfaces du troisième ordre capables de cubature algébrique doivent être recherchées dans le type

$$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)+\mathrm{H}=0.$$

Si l'on suppose la surface irréductible, la seule ligne double qu'elle puisse contenir sera une droite. Supposons qu'on ait pris cette droite pour axe des z, l'équation de la surface devra se réduire à une identité si l'on y fait $x = 0$ et $y = 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
&c_1c_2c_3 = 0,\\
&c_1c_2d_3 + c_2c_3d_2 + c_3c_1d_1 = 0,\\
&c_1d_2d_3 + c_2d_3d_1 + c_3d_1d_2 = 0,\\
&d_1d_2d_3 + \mathrm{H} = 0.
\end{aligned}$$

H ne pouvant être supposé nul, sans quoi la surface se réduirait à trois plans, d_1, ni d_2, ni d_3 ne sauraient non plus disparaître : il en résulte évidemment que c_1, c_2 et c_3 doivent être nuls.

C'est-à-dire que la surface doit être un cylindre parallèle à sa ligne double.

Les conditions précédentes expriment simplement que l'axe des z est sur la surface, pour que cette ligne soit double il faut et il suffit que l'origine soit un point double de la trace du cylindre sur le plan des xy.

Or, l'équation de cette trace, ou celle de la surface, est devenue

$$(a_1x + b_1y + d_1)(a_2x + b_2y + d_2)(a_3x + b_3y + d_3) - d_1d_2d_3 = 0$$

et si l'origine est un point double, cette trace sera quarrable algébriquement, c'est-à-dire sera un trèfle ou un folium, suivant que les trois asymptotes seront réelles ou qu'il y en aura deux imaginaires.

Les seules surfaces du troisième ordre cubables algébriquement, en dehors, bien entendu, des surfaces paraboliques telles que par exemple le cylindre

$$y^3 - a^2y + a^3x = 0,$$

sont donc le cylindre à base de trèfle et le cylindre à base de folium, conjugués l'un de l'autre.

Remarque relative aux intégrales quadratrices des surfaces du second ordre.

456. On sait que l'intégrale double quadratrice d'une surface du second ordre, pourvue de centre, admet deux périodes ultra-sphériques et n'admet aucune période sphérique. Il est facile de vérifier que cette intégrale remplit effectivement les conditions, assignées dans ce qui précède, qui conviennent au cas où elle se trouve.

En effet, considérons par exemple l'intégrale quadratrice de l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 :$$

cette intégrale est

$$\iint dxdy \sqrt{\frac{\dfrac{a^2+c^2}{a^4}x^2 + \dfrac{b^2+c^2}{b^4}y^2 - 1}{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1}};$$

c'est le quotient par c de l'intégrale cubatrice de la surface

$$\frac{z}{c} = \sqrt{\frac{\dfrac{a^2+c^2}{a^4}x^2 + \dfrac{b^2+c^2}{b^4}y^2 - 1}{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1}},$$

qui a pour période réelle le volume enfermé par la portion de la surface réelle projetée dans l'intérieur de l'ellipse

$$\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2+\frac{b^2+c^2}{b^4}y^2-1=0,$$

et pour période imaginaire le volume enfermé entre le cylindre

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

et la conjuguée à abscisses et ordonnées réelles, laquelle se projette entre les deux ellipses

$$\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2+\frac{b^2+c^2}{b^4}y^2-1=0 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Il s'agit de faire voir que la surface

$$\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2-\frac{b^2+c^2}{b^4}y^2+1=0$$

satisfait aux conditions (B), (C) et (D) et présente d'ailleurs une courbe double du second degré.

Or la fonction $\varphi(x, y, z)$ est ici

$$\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

ou

$$\frac{z}{c}\,\frac{z}{c}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\sqrt{-1}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sqrt{-1}\right).$$

Le cône $\varphi(x, y, z)=0$, se compose donc bien de quatre plans (1).

La condition (C) est remplie d'elle-même, puisque la fonction ψ manque.

Quant à la condition (D), en raison de l'absence de la fonction ψ, elle se réduirait à

$$\chi(\alpha, \beta, 1)=0,$$

c'est-à-dire ici à

$$\frac{a^2+c^2}{a^4}\alpha^2+\frac{b^2+c^2}{b^4}\beta^2-\frac{1}{c^2}=0,$$

(1) On remarquera à ce sujet que la condition (B) sera toujours remplie d'elle-même par une surface de degré m dont les asymptotes formeraient un cylindre de degré m, car le cône lieu des parallèles à ces asymptotes menées de l'origine, sera alors composé de m plans se coupant suivant la parallèle aux génératrices de ce cylindre, menée de l'origine.

relation qui ne s'identifie pas avec

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)=0.$$

Mais la non-concordance des équations (B), (C) et (D), dans le cas de la surface qui nous occupe, s'explique naturellement par l'absence de la fonction ψ, qui dispense les asymptotes d'être contenues dans quatre plans; de sorte que la condition obtenue pour exprimer que chacun de ces quatre plans coupe la surface suivant une ligne de degré $(4-3)$ n'est plus celle qui convient.

Les équations (B), (C) et (D), établies dans le cas général, n'avaient d'autre objet que d'exprimer que toutes les asymptotes de la surface la coupent en trois points situés à l'infini; or il est facile de voir que cette condition est remplie dans le cas de la surface qui nous occupe.

En effet, d'abord les asymptotes parallèles à l'axe des z constituent le cylindre réel

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

et ses conjuguées. Or, si l'on donne à x et à y des valeurs réelles ou imaginaires satisfaisant à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

l'équation de la surface ne donne pour z que des valeurs infinies, de sorte que les asymptotes parallèles à l'axe des z ne coupent pas seulement la surface en trois, mais en quatre points situés à l'infini.

Quant aux deux asymptotes parallèles au plan des xy de la section par un plan

$$y=mx+n,$$

elles auraient pour seconde équation

$$z=\pm c\sqrt{\frac{\dfrac{a^2+c^2}{a^2}+\dfrac{b^2+c^2}{b^2}m^2}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}};$$

or, si l'on élimine y et z entre ces deux équations et celle de la surface, il vient

$$\sqrt{\frac{\dfrac{a^2+c^2}{a^2}+\dfrac{b^2+c^2}{b^2}m^2}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}}=\sqrt{\frac{\left(\dfrac{a^2+c^2}{a^2}+\dfrac{b^2+c^2}{b^2}m^2\right)x^2+2mn\dfrac{b^2+c^2}{b^2}x+n^2\dfrac{b^2+c^2}{b^2}-1}{\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}\right)x^2+2\dfrac{mn}{b^2}x+\dfrac{n^2}{b^2}-1}};$$

et si l'on ramène cette équation à la forme entière, elle se réduit au premier degré.

Ainsi les conditions qu'expriment en général les équations (B), (C) et (D) sont bien remplies dans le cas particulier qui nous occupe.

Quant à la condition complémentaire, elle se rapporterait ici soit aux plans parallèles à

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-1}\,x,$$

soit aux plans parallèles au plan des xy : tous ces plans coupent en effet la surface suivant des courbes de degrés inférieurs au quatrième.

Un plan

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{-1}\,x + n$$

coupe la surface suivant une courbe dont la projection sur le plan des xz a pour équation

$$\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{2n}{ab}\sqrt{-1}\,x + \frac{n^2}{b^2} - 1\right) = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)x^2 + 2\frac{b^2+c^2}{b^2 a}n\sqrt{-1}\,x + \frac{b^2+c^2}{b^2}n^2 - 1,$$

or l'asymptote

$$x = \frac{a(b^2 - n^2)}{2nb\sqrt{-1}}$$

rencontre la courbe en trois points situés à l'infini, et quant aux deux autres, elles sont elles-mêmes à l'infini, de sorte qu'elles remplissent aussi la condition; par conséquent les sections parallèles aux plans

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-1\,x}$$

ne donnent lieu à aucune période.

Quant à la section par un plan $z = h$, elle a pour équation

$$\frac{h^2}{c^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = \frac{a^2 + c^2}{a^4}x^2 + \frac{b^2 + c^2}{b^4}y^2 - 1$$

et cette conique ne se réduit à deux droites que pour $h = \pm c$; par conséquent l'intégrale double admettrait pour période

$$\int_{-c}^{+c} \omega dz,$$

ω désignant l'aire, fonction de z, de l'ellipse d'intersection de la surface par un plan parallèle aux xy, compris entre $z = -c$ et $z = +c$.

Mais cette période est précisément la période réelle signalée tout d'abord.

Cette période serait ultra-sphérique si on la considérait comme engendrée par la période de la quadratrice d'une section quelconque, parallèle aux z, par exemple, elle est sphérique si on la considère comme engendrée par la période de la quadratrice d'une section parallèle aux xy.

Cette coïncidence particulière réduit le nombre des périodes à deux.

Il ne reste plus qu'à reconnaître dans la surface une courbe double du second ordre.

Or la section par un plan quelconque parallèle à l'axe des z a deux asymptotes parallèles à cet axe, ce qui équivaut à dire que cette section a un point double à l'infini dans la direction de l'axe des z. La surface présente donc une ligne double du premier ordre rejetée à l'infini dans la direction de l'axe des z.

D'un autre côté, la même section a deux asymptotes parallèles à la trace du plan sécant sur le plan des xy, ce qui équivaut à dire qu'elle a un point double à l'infini dans la direction de cette trace. La surface présente donc une seconde ligne double du premier ordre, rejetée à l'infini dans une direction parallèle au plan des xy.

Ainsi toutes les conditions assignées dans ce mémoire pour une double périodicité sont remplies par l'intégrale en question.

Observation générale relative aux intégrales d'ordres supérieurs.

457. J'ai établi dans le chapitre précédent que les courbes de degré m quarrables algébriquement sont celles qui présentent $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles et dont les équations rentrent d'ailleurs dans le type

$$(y - a_1x - b_1)(y - a_2x - b_2)\dots(y - a_mx - b_m) + \Phi_{m-3}(x, y) = 0.$$

Je viens d'établir que les surfaces de degré m capables de cubature algébrique sont celles qui présentent une ligne double de degré $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, et dont les équations rentrent d'ailleurs dans le type

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)\dots(A_mx+B_my+C_mz+D_m)+\Phi_{m-3}(x,y,z)=0.$$

Les formes de l'équation générale des courbes quarrables algébriquement et de l'équation générale des surfaces capables de cubature algébrique prêtent d'elles-mêmes à un rapprochement important par les conséquences qu'on peut en tirer.

La forme de l'équation générale des surfaces capables de cubature algébrique indique d'elle-même que ces surfaces sont telles que toutes leurs sections planes sont quarrables algébriquement.

C'est du reste cette condition, de ne présenter que des sections quar-

rables, que nous avons traduite en formules, en sorte que ce chapitre n'a eu d'autre objet que d'établir que l'équation la plus générale des surfaces dont toutes les sections planes sont quarrables est précisément l'équation

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) \ldots + \Phi_{m-3}(x, y, z) = 0$$

dans laquelle on eût reconnu d'avance des surfaces capables de cubature algébrique, puisque si l'on coupe une de ces surfaces par un plan quelconque

$$z = \alpha x + \beta y + \delta,$$

on obtient immédiatement, pour équation de la projection de la section sur le plan des xy, l'équation d'une courbe quarrable et que, la projection étant quarrable, la courbe elle-même l'est.

Mais la loi de dépendance entre les équations d'une surface cubable et d'une courbe quarrable étant maintenant fortement établie, il semble qu'on pourrait étendre de proche en proche la proposition aux intégrales de tous les ordres.

Ainsi, il est évident que pour que l'intégrale triple dont l'élément serait le produit de l'une des quatre variables x, y, z, u liées entre elles par une équation algébrique $f(x, y, z, u) = 0$, par les différentielles des trois autres, pût être exprimée algébriquement, il faudrait que la surface dont l'équation résulterait de l'élimination d'une des variables entre $f(x, y, z, u) = 0$ et une équation linéaire

$$Mx + Ny + Pz + Qu + R = 0$$

fût capable de cubature algébrique.

Et si l'on admettait que

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1u + E_1) \ldots (A_mx + B_my + C_mz + D_mu + E_m) + \Phi_{m-3}(x, y, z, u) = 0$$

est l'équation la plus générale de degré m, entre x, y, z et u, telle que l'élimination d'une des variables, u par exemple, entre cette équation et une équation linéaire

$$Mx + Ny + Pz + Qu + R = 0$$

donnât pour résultat une équation de la forme

$$(A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1) \ldots (A'_mx + B'_my + C'_mz + D'_m) + \Phi_{m-3}(x, y, z) = 0$$

on en conclurait que les conditions à remplir par l'équation

$$f(x, y, z, u) = 0$$

pour que l'intégrale

$$\int\int\int u\,dx\,dy\,dz,$$

par exemple, fût exprimable algébriquement, seraient : 1° de présenter en double les solutions d'un système de deux équations en x, y, z et u, telles que l'élimination d'une des variables fournît une équation de degré $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$; 2° de rentrer dans le type

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1u+E_1)\ldots(A_mx+B_my+C_mz+D_mu+E_m)+\Phi_{m-3}(x,y,z,u)=0.$$

En étendant ainsi la proposition de proche en proche on en conclurait que les conditions à remplir par une équation

$$f(x,\ y,\ z,\ldots\ \mathrm{F})=0$$

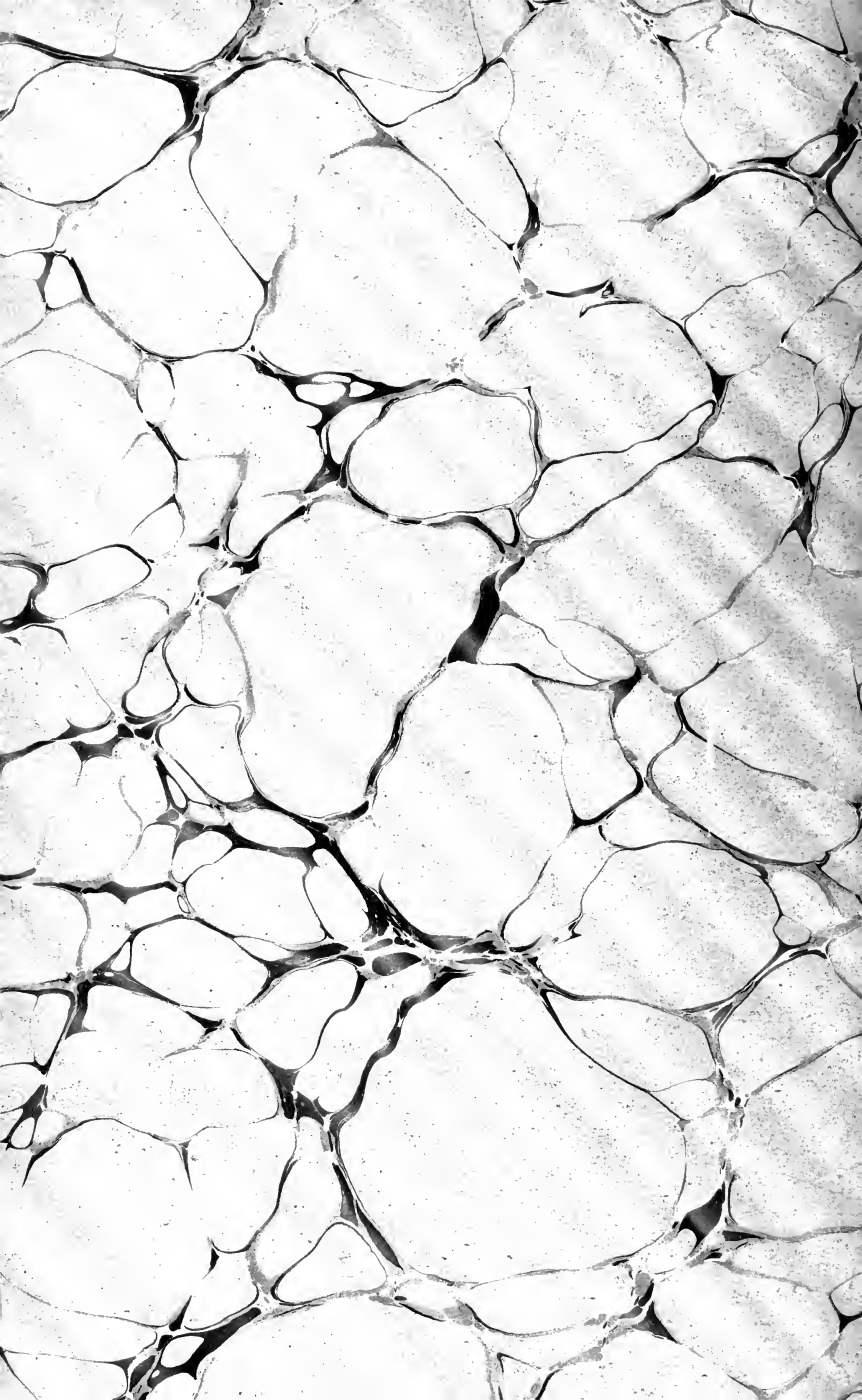
entre $m+1$ variables x, y, z,... F, pour que l'intégrale

$$\int \mathrm{F}dxdydz\ldots$$

fût exprimable algébriquement, seraient : 1° de présenter en double les solutions d'un système de deux équations en x, y, z,... F, telles que l'élimination d'une des variables fournît une équation de degré $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$; 2° de rentrer dans le type

$$(A_1x+B_1y+\ldots+K_1\mathrm{F}+L_1)\ldots(A_mx+B_my+\ldots+K_m\mathrm{F}+L_m)+\Phi_{m-3}(x,y\ldots\mathrm{F})=0.$$

FIN DU TOME DEUXIÈME.



QA
331
M35
t.2

Marie, Maximilien
Theorie des fonctions

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY